2024-2025学年山东省泰安市宁阳县九年级（上）期末数学试卷（五四学制）

一、选择题：本题共10小题，每小题4分，共40分．每小题只有一个选项符合题目要求．

1．（4分）下列各数在数轴上表示的点距离原点最近的是(　　)

A．-2　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\frac{5}{2}$

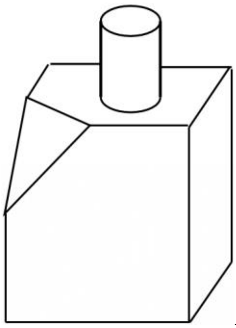
2．（4分）敦煌莫高窟是世界优秀文化遗产．下列是莫高窟壁画中的部分图案，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)

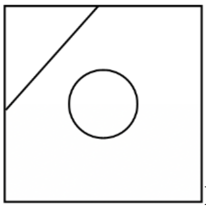
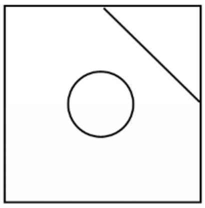
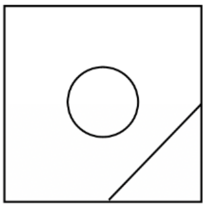
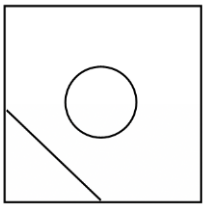
A．　B．　C．　D．

3．（4分）2024年12月2日，年输气能力达380亿立方米的中俄东线天然气管道全线贯通，它是中国四大油气战略通道的重要组成部分，也是目前世界上单管输量最大的长输天然气管道．将法 380 亿用科学记数法表示应为(　　)

A．0.38×10^{3}　　B．3.8×10^{2}　　C．3.8×10^{10}　　D．38×10^{9}

4．（4分）如图所示几何体的俯视图是(　　)



A．B．　C．　D．

5．（4分）不等式组$\begin{cases}x-3<0\\2(x+2)>x\end{cases}$的解集是(　　)

A．$-4<x<3$　　B．$3<x<4$　　C．$-3<x<4$　　D．$-2<x<3$

6．（4分）下列运算正确的是(　　)

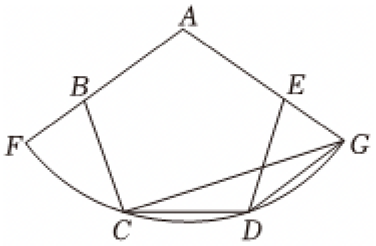
A．$m^{2}+m^{3}=m^{5}$　　B．$(mn^{2})^{3}=m^{3}n^{6}$　　C．$m^{2}n-mn=m$　　D．$m^{4}\div m^{-2}=m^{-2}$

7．（4分）有4张只有数字不同的卡片，上面分别写有2，3，4，5．从中随机抽取2张，所抽取卡片上的数字之和能够被3整除的概率是(　　)

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{5}$　　D．$\frac{1}{6}$

8．（4分）如图，已知五边形$ABCDE$为正五边形，以点A为圆心，以AC的长为半径画弧，分别交AB，AE的延长线于点F，G．连接CG，DG，则$\angle CGD$等于(　　)

A．16°　　B．17°　　C．18°　　D．19°



9．（4 分）下列命题的逆命题是真命题的是(　　)

A．如果 $a>b$，那么 $ac>bc$　　B．如果 $a=b=0$，那么 $ab=0$

C．如果 $a>b$，那么 $a^2>b^2$　　D．如果 $|a|=|b|$，那么 $a=b$

10．（4 分）某社团计划购买一些篮球和足球，已知篮球单价是 120 元，足球单价是 150 元．若该社团用 2400 元购买这两种球（篮球、足球都购买）且 2400 元恰好用完，则该社团共有几种购买方案(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

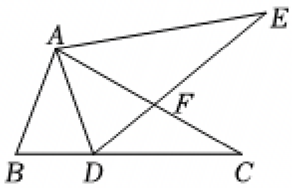
二、填空题：本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．

11．（4 分）代数式 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是 ____ ．

12．（4 分）若关于 x 的方程 $x^2+mx-6=0$ 的一个根是 2，则另一个根是 ____．

13．（4 分）已知直线 $y=-x+2$ 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B，点 P 是 x 轴正半轴上的一点，连接 PB．当$\triangle APB$ 的面积等于 4 时，直线 PB 的表达式为 ____ ．

14．（4 分）如图，将$\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针方向旋转一定角度得到$\triangle ADE$，使点 D 落在 BC 上，AC 与 DE 相交于点 F．若 $\angle C=40^\circ$，$DE\perp AC$，则 $\angle DAC$ 的大小为 ____．



14

15．（4 分）在平面直角坐标系中，若 a，b 均为整数，对于点 $A(a,b)$，规定：

当 a 为奇数时，将其减 1 后除以 2 作为点 B 的横坐标，当 a 为偶数时，将其除以 2 作为点 B 的横坐标；同时对 b 进行和 a 同样的处理作为点 B 的纵坐标．由点 A 到点 B 这样的坐标变换称为一次“归一变换”．

经过数次“归一变换”后，平面直角坐标系内所有横、纵坐标均为整数的点终将变换为 $(-1,-1)$，$(-1,0)$，$(0,-1)$，$(0,0)$ 中的一个．

当 a，b 均为整数且 $|a|\geqslant 20$，$|b|\geqslant 20$ 时，经过数次“归一变换”后最终变换为 $(-1,0)$ 的 (a,b) 是 ____．（写出一个满足题意的点即可）

三、解答题：本题共 8 小题，共 90 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16．（10 分）（1）计算：$\sqrt{12}-2\tan 60^{\circ}+(\pi-3)^{0}+|\sqrt{3}-1|$；（2）先化简，再求值：$(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2})\div\dfrac{x^{2}+x}{x^{2}-4}$，其中 $x=3$．

17．（10 分）如图 1，$AC=2AB=4$．以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AB，AC 于点 M，N．分别以点 M，N 为圆心，以大于 $\dfrac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle BAC$ 内交于点 E．作射线 AE．过点 C 作 $CD//AB$，交 AE 于点 D．

（1）求 CD 的长；

（2）如图 2，连接 BD．分别以点 A，C 为圆心，大于 $\dfrac{1}{2}AC$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P，Q．作直线 PQ，交 AB 的延长线于点 F．连接 CF，交 BD 于点 G．当 $\angle BAC=60^{\circ}$ 时，求 $\dfrac{BG}{DG}$ 的值．

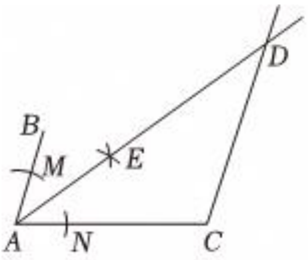


图1

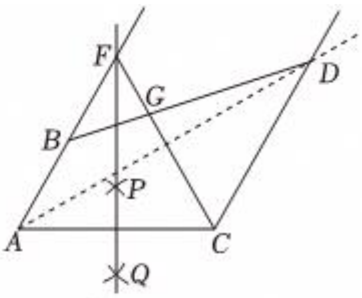


图2

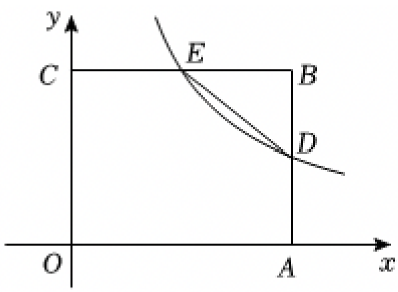
18．（10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知四边形 $OABC$ 为矩形，其中 $A(4,0)$，$C(0,3)$．

（1）当反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象和矩形 $OABC$ 有交点时，k 的最大值为 ____．（请直接写出结果）

（2）如图，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象与 AB，BC 分别交于点 D，E，连接 DE．

①当 $k=6$ 时，求△ODE 的面积；

②连接 AC，判断 DE 与 AC 是否平行？并说明理由．



19.（11 分）某市旅游资源丰富，每年都有大量游客前来旅游．该市实验中学数学兴趣社团开展社会实践活动，在国庆节当天随机选取 100 名游客进行满意度调查．每名游客分别对该市的历史文化、自然景观、地域特色、旅游产品、旅游服务五个项目打分，每个项目 20 分，共 100 分．将各项打分进行了整理，下面给出了部分信息．

信息一 每名游客对五个项目打分之和记为满意度分数，满意度分数用 x 表示 $(x\geqslant 60)$，将满意度数据分成如下四组：第 1 组 $60\leqslant x<70$，第 2 组 $70\leqslant x<80$，第 3 组 $80\leqslant x<90$，第 4 组 $90\leqslant x\leqslant 100$．以下是满意度分数的频数分布直方图和扇形统计图的部分信息．

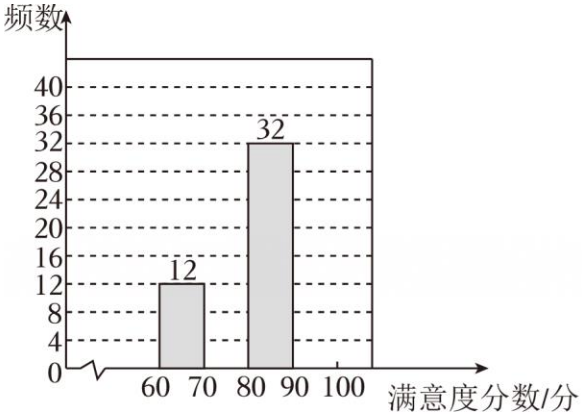


图1

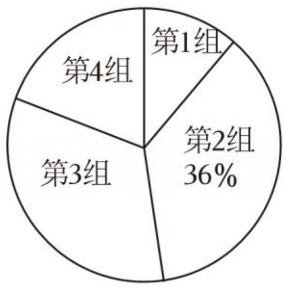


图2

结合信息一解决下列问题：

（1）将频数分布直方图补全，并判断这 100 个满意度分数的中位数位于第 ____组；

（2）在扇形统计图中，第 4 组所对应的圆心角度数是 ____；

（3）据统计，当天本市游客人数达到 6.8 万．请估计这 6.8 万人中满意度分数不低于 80 图分的人数；

信息二 100 名游客对本市历史文化、自然景观、地域特色、旅游产品、旅游服务打分的平均分和方差如表：

项目 统计量	历史文化	自然景观	地域特色	旅游产品	旅游服务
平均分	18.3	17.6	16.1	15.1	16.8
方差	2.1	2.3	1.8	1.9	3.4

（4）为了更好地服务游客，提升本市旅游形象，请结合信息二，写出合理建议供主管部门参考．

20．（11 分）在数学探究课上，老师要求同学们按照下列步骤进行探究．

动手操作：

第一步，画出等腰$\triangle ABC$，使得$AB=AC=3$．

第二步，作出$\triangle ABC$关于AC对称的$\triangle AB'C$．

第三步，过点A作BC的平行线，交直线$B'C$于点D．

第四步，分别以AB，AD为边作$▱ABED$．

根据以上操作，甲、乙、丙三位同学各自作出了如图所示的三个图形，并共同进行了探究．请你根据三位同学作出的图形解决下列问题．

（1）直接写出图 1 中$\angle BAC$的度数；

（2）图 2、图 3 中均有$\triangle AB'D\cong\triangle DEC$．请就图 2 给出证明；

（3）图 3 中$BC=4$．求出AD的长．

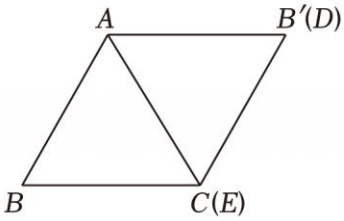


图1

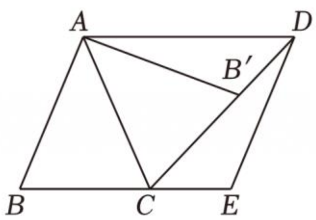


图2

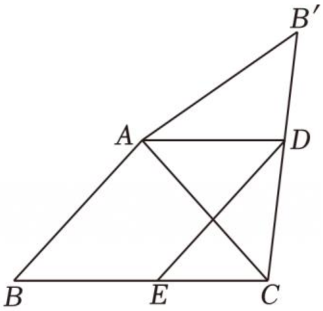
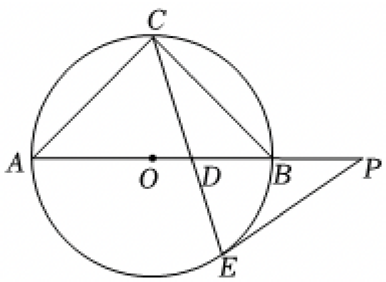


图3

21．（12 分）如图，等腰$Rt\triangle ABC$内接于$\odot O$，点D是线段OB上异于O，B的一点．连接CD并延长交$\odot O$于点E，点P在AB的延长线上，$PD=PE$．

（1）求证：PE是$\odot O$的切线；

（2）若$BD=3OD$，求$\dfrac{PB}{PE}$的值．



22．（12 分）【实践课题】通过测量相关距离与角度，计算待建环山路的长度．

【实践工具】测距仪、测角仪等测量工具．

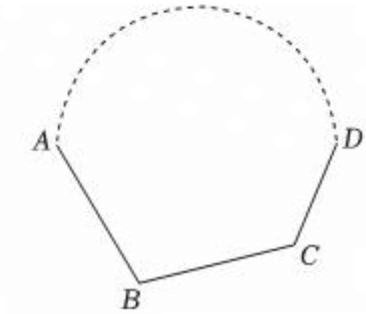
【实践活动】如图，某山的一侧已建成了三段休闲步道，数学实践小组经过现场勘探，画出示意图，休闲步道分别是 AB，BC，CD，且 A，B，C，D 在同一水平面上．经过多次测量，得到如下数据：$AB=BC=7.5km$，$CD=5km$，$\angle ABC=106.4^{\circ}$，$\angle BCD=126.8^{\circ}$．

【问题解决】城建部门准备在山的另一侧修建一条以 AD 为直径的半圆状环山路（图中虚线部分）．

（1）求 A，C 两点间的距离；

（2）求该条待建环山路的长度（结果保留 π）．

（参考数据：$\sin 53.2^{\circ}\approx 0.80$，$\cos 53.2^{\circ}\approx 0.60$，$\sin 73.6^{\circ}\approx 0.96$，$\cos 73.6^{\circ}\approx 0.28$）



23．（14 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2+(b-2)x+\dfrac{b^2}{4}$．

（1）当 $a=1$ 时，

①求证：该抛物线的顶点不在第三象限；

②若 b 为自然数，且该抛物线与 x 轴有两个不同交点 $(x_1,\ 0)$ 和 $(x_2,\ 0)(x_1<x_2)$，求 x_2-x_1 的值．

（2）若 $b<0$，直线 $y=ax+m$ 与该抛物线有两个交点 A，B，其坐标分别为 $A(0,2-m)$ 和 $B(2,n)$．当 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 时，求 $y=ax^2+(b-2)x+\dfrac{b^2}{4}$ 的最小值．

2024-2025学年山东省泰安市宁阳县九年级（上）期末数学试卷（五四学制）

参考答案与试题解析

一．选择题（共10小题）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	C	D	A	B	A	C	D	C

一、选择题：本题共10小题，每小题4分，共40分．每小题只有一个选项符合题目要求．

1．（4分）下列各数在数轴上表示的点距离原点最近的是(　　)

A．-2　　　　B．$-\dfrac{1}{3}$　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．$\dfrac{5}{2}$

【解答】解：数轴上表示的点距离原点最近的是$-\dfrac{1}{3}$，

故选：B．

2．（4分）敦煌莫高窟是世界优秀文化遗产．下列是莫高窟壁画中的部分图案，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)

A．

B．

C．

D．

【解答】解：A、该图形是中心对称图形，不是轴对称图形，不符合题意；

B、该图形不是中心对称图形，是轴对称图形，不符合题意；

C、该图形是中心对称图形，不是轴对称图形，不符合题意；

D、该图形既是中心对称图形，也是轴对称图形，符合题意．

故选：D．

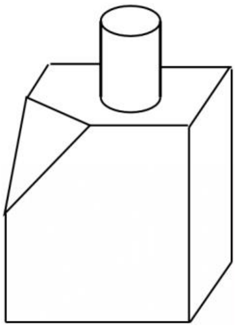
3．（4分）2024年12月2日，年输气能力达380亿立方米的中俄东线天然气管道全线贯通，它是中国四大油气战略通道的重要组成部分，也是目前世界上单管输量最大的长输天然气管道．将法 380 亿用科学记数法表示应为(　　)

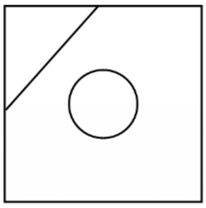
A．0.38×10^{3}　　B．3.8×10^{2}　　C．3.8×10^{10}　　D．38×10^{9}

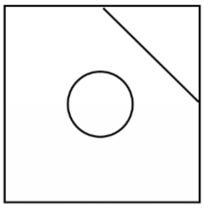
【解答】解：380 亿$=38000000000=3.8\times10^{10}$．

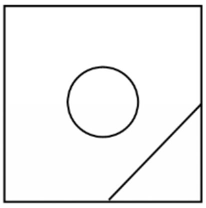
故选：C．

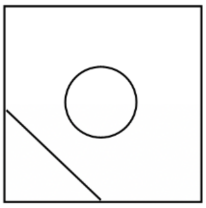
4．（4 分）如图所示几何体的俯视图是(　　)

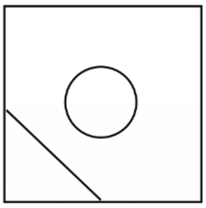


A．

B．

C．

D．

【解答】解：根据三视图的概念可知，几何体的俯视图是：．

故选：D．

5．（4 分）不等式组$\begin{cases}x-3<0\\2(x+2)>x\end{cases}$的解集是(　　)

A．$-4<x<3$　　B．$3<x<4$　　C．$-3<x<4$　　D．$-2<x<3$

【解答】解：解不等式$x-3<0$得$x<3$，

解不等式$2(x+2)>x$得$x>-4$，

$\therefore$不等式组的解集为$-4<x<3$，

故选：A．

6．（4 分）下列运算正确的是(　　)

A．$m^{2}+m^{3}=m^{5}$　　B．$(mn^{2})^{3}=m^{3}n^{6}$　　C．$m^{2}n-mn=m$　　D．$m^{4}\div m^{-2}=m^{-2}$

【解答】解：A．两者不是同类项，不能合并，故不正确，不符合题意；

B．$(mn^2)^3=m^3n^6$，原计算正确，符合题意；

C．m^2n，mn不是同类项，不能合并，故不正确，不符合题意；

D．$m^4\div m^{-2}=m^{4-(-2)}=m^6$，故不正确，不符合题意；

故选：B．

7．（4 分）有 4 张只有数字不同的卡片，上面分别写有 2，3，4，5．从中随机抽取 2 张，所抽取卡片上的数字之和能够被 3 整除的概率是(　　)

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{5}$　　D．$\frac{1}{6}$

【解答】解：如下：

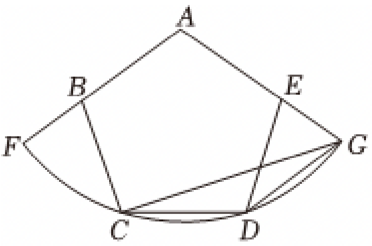
	2	3	4	5
2	——	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$
3	$(3,2)$	——	$(3,4)$	$(3,5)$
4	$(4,2)$	$(4,3)$	——	$(4,5)$
5	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	——

由表知，共有 12 种等可能结果，数字之和能够被 3 整除的有种 4 种结果，

$\therefore$概率$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$．

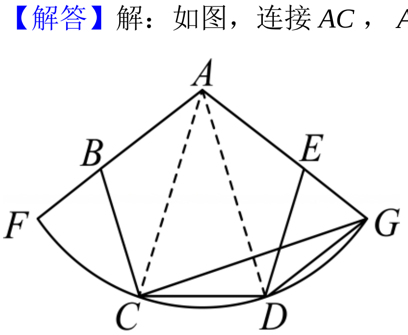
故选：A．

8．（4 分）如图，已知五边形$ABCDE$为正五边形，以点A为圆心，以AC的长为半径画弧，分别交AB，AE的延长线于点F，G．连接CG，DG，则$\angle CGD$等于(　　)



A．16°　　B．17°　　C．18°　　D．19°

【解答】解：如图，连接AC，AD，



$\therefore\angle CAD=2\angle CGD$，$\angle CGD=\frac{1}{2}\angle CAD$，

$\because$五边形$ABCDE$为正五边形，

$\angle B=\angle BAE=\dfrac{180°\times(5-2)}{5}=\dfrac{540°}{5}=108°$，

在等腰△ABC中，$AB=BC$，

$\angle BAC=\dfrac{180°-108°}{2}=36°$，

同理：$\angle EAD=36°$，

$\therefore\angle CAD=\angle BAE-\angle BAC-\angle DAE=36°$，

$\therefore\angle CGD=\dfrac{1}{2}\angle CAD=\dfrac{1}{2}\times36°=18°$，

故选：C.

9．（4分）下列命题的逆命题是真命题的是(　　)

A．如果$a>b$，那么$ac>bc$　　　　B．如果$a=b=0$，那么$ab=0$

C．如果$a>b$，那么$a^2>b^2$　　　　D．如果$|a|=|b|$，那么$a=b$

【解答】解：A．逆命题为：如果$ac>bc$，那么$a>b$是假命题，不符合题意；

B．逆命题为：如果$ab=0$，那么$a=b=0$是假命题，不符合题意；

C．逆命题为：如果$a^2>b^2$，那么$a>b$是假命题，不符合题意；

D．逆命题为：如果$a=b$，那么$|a|=|b|$是真命题，符合题意．

故选：D.

10．（4分）某社团计划购买一些篮球和足球，已知篮球单价是120元，足球单价是150元．若该社团用2400元购买这两种球（篮球、足球都购买）且2400元恰好用完，则该社团共有几种购买方案(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解答】解：根据题意，设购买了n个篮球，购买了m个足球，

$\therefore 120n+150m=2400$，

整理得：$4n+5m=80$且n，m为正整数，

当$n=5$时，$m=\dfrac{80-4\times5}{5}=12$；

当$n=10$时，$m=\dfrac{80-4\times10}{5}=8$；

当$n=15$时，$m=\dfrac{80-4\times15}{5}=4$；

综上所述，该社团共有3种购买方案．

故选：C.

二、填空题：本题共5小题，每小题4分，共20分．

11．（4分）代数式$\sqrt{x-2}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是__$x\geqslant2$__．

【解答】解：由题意得：$x-2\geqslant0$，

解得：$x\geqslant2$，

故答案为：$x \geqslant 2$．

12．（4分）若关于 x 的方程 $x^2+mx-6=0$ 的一个根是2，则另一个根是 $\underline{\quad -3 \quad}$．

【解答】解：$\because$ 方程的一个根是2，设另一根是 α，

$\therefore 2\alpha=-6$， $\alpha=-3$；

故答案为：-3．

13．（4分）已知直线 $y=-x+2$ 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B，点 P 是 x 轴正半轴上的一点，连接 PB．当△APB 的面积等于4时，直线 PB 的表达式为 $\underline{\quad y=-\frac{1}{3}x+2 \quad}$ ．

【解答】解：由条件可知 $A(2,0)$， $B(0,2)$，

设点 P 的坐标为 $(p,\ 0)(p>0)$，则 $AP=|p-2|$，

$\because$ △APB 的面积等于4，

$\therefore \frac{1}{2}|p-2|\times 2=4$，解得： $p=6$ 或 -2（不合题意，舍弃），

$\therefore P(6,0)$，

设直线 PB 的解析式为 $y=kx+b$，

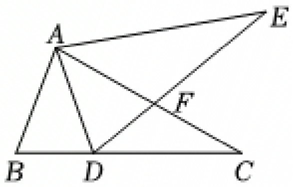
则 $\begin{cases}0=6k+b\\ b=2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-\frac{1}{3}\\ b=2\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 PB 的表达式为 $y=-\frac{1}{3}x+2$．

故答案为： $y=-\frac{1}{3}x+2$．

14．（4分）如图，将△ABC 绕点 A 逆时针方向旋转一定角度得到△ADE，使点 D 落在 BC 上， AC 与 DE 相交于点 F．若 $\angle C=40^\circ$， $DE\perp AC$，则 $\angle DAC$ 的大小为 $\underline{\quad 25^\circ \quad}$．



【解答】解：由题意可得： $\angle BAC=\angle DAE$， $\angle E=\angle C=40^\circ$， $AB=AD$，

$\because DE\perp AC$，

$\therefore \angle CAE=90^\circ-\angle E=50^\circ$，

$\because \angle BAD=\angle BAC-\angle DAC$， $\angle CAE=\angle DAE-\angle DAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAE=50^\circ$，

$\because AB=AD$，

$\therefore \angle ADB=\angle ABC=\dfrac{180^\circ-\angle BAD}{2}=65^\circ$，

$\because \angle ADB=\angle C+\angle DAC$，

$\therefore 65^\circ=40^\circ+\angle DAC$，解得：$\angle DAC=25^\circ$．

故答案为：25°．

15．（4 分）在平面直角坐标系中，若 a，b 均为整数，对于点 $A(a,b)$，规定：

当 a 为奇数时，将其减 1 后除以 2 作为点 B 的横坐标，当 a 为偶数时，将其除以 2 作为点 B 的横坐标；同时对 b 进行和 a 同样的处理作为点 B 的纵坐标．由点 A 到点 B 这样的坐标变换称为一次“归一变换”．

经过数次“归一变换”后，平面直角坐标系内所有横、纵坐标均为整数的点终将变换为 $(-1,-1)$，$(-1,0)$，$(0,-1)$，$(0,0)$ 中的一个．

当 a，b 均为整数且 $|a|\geqslant 20$，$|b|\geqslant 20$ 时，经过数次“归一变换”后最终变换为 $(-1,0)$ 的 (a,b) 是 ____$(-20,20)$（答案不唯一）____．（写出一个满足题意的点即可）

【解答】解：$\because a$，b 均为整数且 $|a|\geqslant 20$，$|b|\geqslant 20$，

$\therefore (a,b)$ 可以为 $(20,20)$，$(20,-20)$，$(-20,20)$，$(-20,-20)$，

选取 $(-20,20)$，

对 $(-20,20)$ 进行“归一变换”可得：$(-10,10)$，

对 $(-10,10)$ 进行“归一变换”可得：$(-5,5)$，

对 $(-5,5)$ 进行“归一变换”可得：$(-3,2)$，

对 $(-3,2)$ 进行“归一变换”可得：$(-2,1)$，

对 $(-2,1)$ 进行“归一变换”可得：$(-1,0)$，

$\therefore$ 经过数次“归一变换”后最终变换为 $(-1,0)$ 的 (a,b) 是 $(-20,20)$（答案不唯一）．

故答案为：$(-20,20)$（答案不唯一）．

三、解答题：本题共 8 小题，共 90 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

16．（10 分）（1）计算：$\sqrt{12}-2\tan 60^\circ+(\pi-3)^0+|\sqrt{3}-1|$；

（2）先化简，再求值：$(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2})\div\dfrac{x^2+x}{x^2-4}$，其中 $x=3$．

【解答】解：（1）原式 $=2\sqrt{3}-2\times\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1$

$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1$

$=\sqrt{3}$；

（2）原式 $=[\dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)}]\div\dfrac{x(x+1)}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)}\div\dfrac{x(x+1)}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+1)}$

$=\frac{2}{x+1}$；

当 $x=3$ 时，原式 $=\frac{2}{3+1}=\frac{1}{2}$．

17．（10 分）如图 1，$AC=2AB=4$．以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AB，AC 于点 M，N．分别以点 M，N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle BAC$ 内交于点 E．作射线 AE．过点 C 作 $CD//AB$，交 AE 于点 D．

（1）求 CD 的长；

（2）如图 2，连接 BD．分别以点 A，C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P，Q．作直线 PQ，交 AB 的延长线于点 F．连接 CF，交 BD 于点 G．当 $\angle BAC=60^\circ$ 时，求 $\frac{BG}{DG}$ 的值．

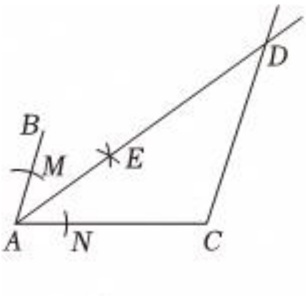


图1

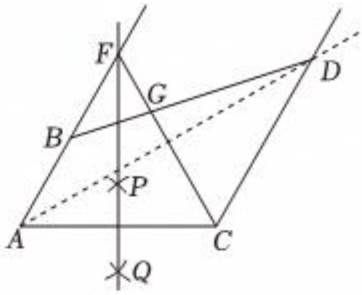


图2

【解答】解：（1）由作图可知：AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore\angle BAD=\angle CAD$．

$\because CD//AB$，

$\therefore\angle ADC=\angle BAD$．

$\therefore\angle ADC=\angle CAD$．

$\therefore CA=CD$．

$\because AC=4$，

$\therefore CD=4$．

（2）由作图可知：PQ 垂直平分 AC，

$\therefore FA=FC$．

$\because\angle BAC=60^\circ$，

$\therefore\triangle ACF$ 为等边三角形．

$\therefore AF=AC=4$．

$\because AC=2AB$，

$\therefore AB=2$．

$\therefore BF=AF-AB=4-2=2$．

由（1）知，$CD=4$，$CD//AB$，

$\therefore \angle BFG=\angle DCG$，$\angle FBG=\angle CDG$．

$\therefore \triangle BFG \backsim \triangle DCG$．

$\therefore \dfrac{BG}{DG}=\dfrac{BF}{DC}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$．

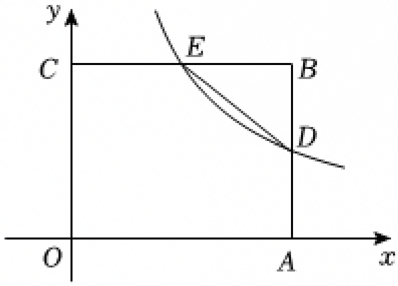
18．（10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知四边形 $OABC$ 为矩形，其中 $A(4,0)$，$C(0,3)$．

（1）当反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象和矩形 $OABC$ 有交点时，k 的最大值为 __12__．（请直接写出结果）

（2）如图，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象与 AB，BC 分别交于点 D，E，连接 DE．

①当 $k=6$ 时，求△ODE 的面积；

②连接 AC，判断 DE 与 AC 是否平行？并说明理由．



【解答】解：（1）k 的最大值为 12；理由如下：

由反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$，得：$k=xy$，

当反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象和矩形 $OABC$ 有交点时，得：$0\leqslant x\leqslant 4$，$0\leqslant y\leqslant 3$，

$\therefore$ 当 $x=4$，$y=3$ 时，k 有最大值 $3\times 4=12$，

故答案为：12；

（2）在平面直角坐标系 xOy 中，已知四边形 $OABC$ 为矩形，其中 $A(4,0)$，$C(0,3)$，

$\therefore B(4,3)$，

$\therefore AB=OC=3$，$BC=AO=4$，

$\because$ 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象与 AB，BC 分别交于点 D，E，

$\therefore D(4,\dfrac{k}{4})$，$E(\dfrac{k}{3},3)$，

①如图 1：连接 OD，OE．

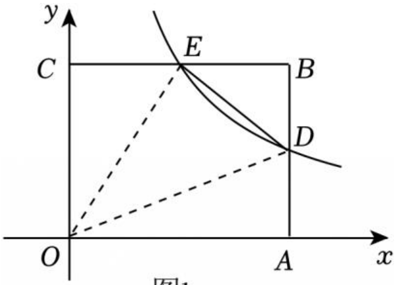


图1

$\because k=6$，

$\therefore D(4,\dfrac{3}{2})$， $E(2,3)$，

$\therefore AD=\dfrac{3}{2}$， $CE=2$， $BD=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore S_{\triangle ODE}=S_{矩形OABC}-S_{\triangle OCE}-S_{\triangle ODA}-S_{\triangle BED}$

$=3\times4-\dfrac{1}{2}\times3\times2-\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{3}{2}$

$=12-3-3-\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{9}{2}$；

② DE 与 AC 相互平行；理由如下：

如图 2，连接 AC .

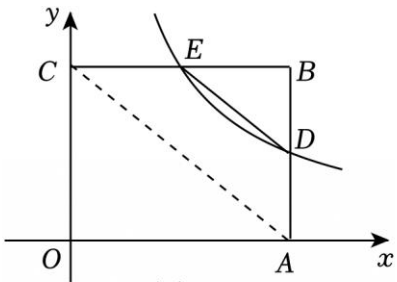


图2

设直线 AC 的表达式为 $y=mx+n$，将 $A(4,0)$， $C(0,3)$ 分别代入得：

$\begin{cases}4m+n=0\\ n=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}m=-\dfrac{3}{4}\\ n=3\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 AC 的表达式为 $y=-\dfrac{3}{4}x+3$，

设直线 DE 的表达式为 $y=px+q$，将 $D(4,\dfrac{k}{4})$， $E(\dfrac{k}{3},3)$ 分别代入得：

$\begin{cases}4p+q=\dfrac{k}{4}\\ \dfrac{k}{3}p+q=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}p=-\dfrac{3}{4}\\ q=\dfrac{k+12}{4}\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 DE 的表达式为 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{k+12}{4}$，

$\because$ $y=-\dfrac{3}{4}x+3$，

$\therefore$ 直线 DE 可以由直线 AC 经过平移得到.

$\therefore DE//AC$.

19.（11 分）某市旅游资源丰富，每年都有大量游客前来旅游．该市实验中学数学兴趣社团开展社会实践活动，在国庆节当天随机选取 100 名游客进行满意度调查．每名游客分别对该市的历史文化、自然景观、地域特色、旅游产品、旅游服务五个项目打分，每个项目 20 分，共 100 分．将各项打分进行了整理，下面给出了部分信息．

信息一 每名游客对五个项目打分之和记为满意度分数，满意度分数用 x 表示 $(x\geqslant 60)$，将满意度数据分成如下四组：第 1 组 $60\leqslant x<70$，第 2 组 $70\leqslant x<80$，第 3 组 $80\leqslant x<90$，第 4 组 $90\leqslant x\leqslant 100$．以下是满意度分数的频数分布直方图和扇形统计图的部分信息．

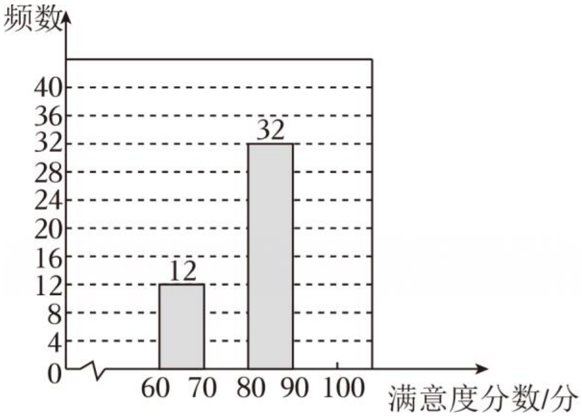


图1

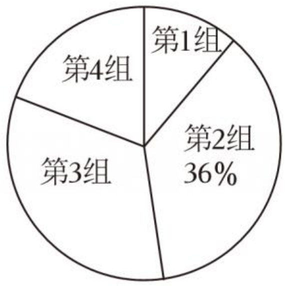


图2

结合信息一解决下列问题：

（1）将频数分布直方图补全，并判断这 100 个满意度分数的中位数位于第 __三__ 组；

（2）在扇形统计图中，第 4 组所对应的圆心角度数是 ____；

（3）据统计，当天本市游客人数达到 6.8 万．请估计这 6.8 万人中满意度分数不低于 80 图分的人数；

信息二 100 名游客对本市历史文化、自然景观、地域特色、旅游产品、旅游服务打分的平均分和方差如表：

项目 统计量	历史文化	自然景观	地域特色	旅游产品	旅游服务
平均分	18.3	17.6	16.1	15.1	16.8
方差	2.1	2.3	1.8	1.9	3.4

（4）为了更好地服务游客，提升本市旅游形象，请结合信息二，写出合理建议供主管部门参考．

【解答】解：（1）第二组的频数为：$100\times 36\%=36$，

第四组的频数为：$100-12-36-32=20$，

故补全频数分布直方图如下：

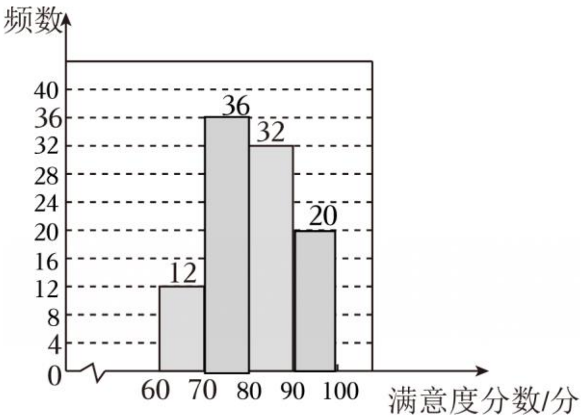


图1

由于有 100 个数据，则中位数为数据从大到小排列后的第 50 和 51 个数的平均数，又一、二两组的数量总和为 $12+36=48<50$，一、二、三组数量之和为 $12+36+32=80>50$，则这 100 个满意度分数的中位数位于第 3 组.

故答案为：三.

（2）$360°\times\dfrac{20}{50}=72°$.

故答案为：$72°$；

（3）$6.8\times\dfrac{32+20}{100}=3.536$（万人）.

答：不低于 80 分的人数为 3.536 万人.

（4）旅游产品的平均分最低，应进一步开发旅游产品以满足游客需求；旅游服务的满意度打分的方差大，所以服务质量良莠不齐，应加大监督力度，切实提升游客的体验感.

20.（11 分）在数学探究课上，老师要求同学们按照下列步骤进行探究.

动手操作：

第一步，画出等腰$\triangle ABC$，使得 $AB=AC=3$.

第二步，作出$\triangle ABC$ 关于 AC 对称的$\triangle AB'C$.

第三步，过点 A 作 BC 的平行线，交直线 $B'C$ 于点 D.

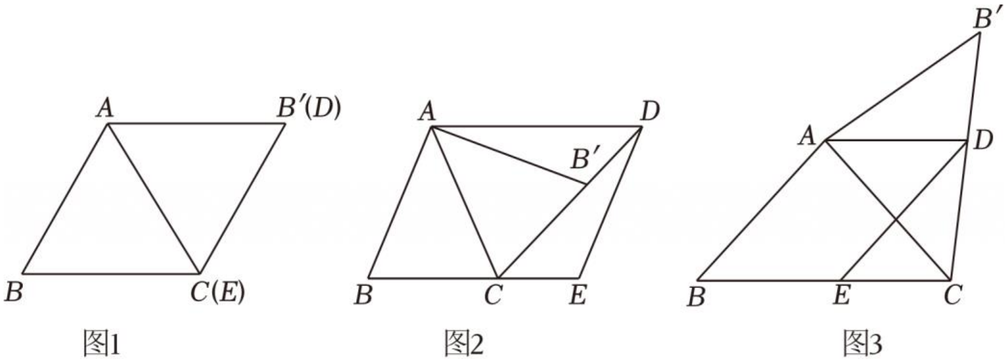
第四步，分别以 AB，AD 为边作$▱ABED$.

根据以上操作，甲、乙、丙三位同学各自作出了如图所示的三个图形，并共同进行了探究．请你根据三位同学作出的图形解决下列问题.

（1）直接写出图 1 中 $\angle BAC$ 的度数；

（2）图 2、图 3 中均有$\triangle AB'D\cong\triangle DEC$．请就图 2 给出证明；

（3）图 3 中 $BC=4$．求出 AD 的长.



【解答】（1）解：由题意可得，四边形 $ABDC$ 是平行四边形，

$\therefore BC//AB'$， $AB//B'C$，

$\therefore \angle B+\angle BAB'=180^\circ$， $\angle B'AC=\angle ACB$，

$\because AB=AC=3$，$\triangle ABC$ 关于 AC 对称的$\triangle AB'C$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$， $\angle BAC=\angle B'AC$，

$\therefore \angle B'AC=\angle ACB=\angle ABC=\angle BAC$，

$\therefore \angle B+\angle BAB'=3\angle BAC=180^\circ$，

$\therefore \angle BAC=60^\circ$；

（2）证明：$\because$四边形 $ABED$ 是平行四边形，

$\therefore AB=DE$， $\angle B+\angle E=180^\circ$，

由对称可得， $AB=AB'$， $\angle B=\angle AB'C$，

$\therefore AB'=DE$， $\angle AB'C+\angle E=180^\circ$，

$\because \angle AB'C+\angle AB'D=180^\circ$，

$\therefore \angle E=\angle AB'D$，

$\because AD//BE$，

$\therefore \angle ADC=\angle DCE$，

在$\triangle AB'D$和$\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases}\angle AB'D=\angle E\\ \angle DCE=\angle ADB',\\ AB'=DE\end{cases}$$

$\therefore \triangle AB'D\cong\triangle DEC(AAS)$；

（3）解：过点 A 作 $AF\perp BC$，垂足为点 F，

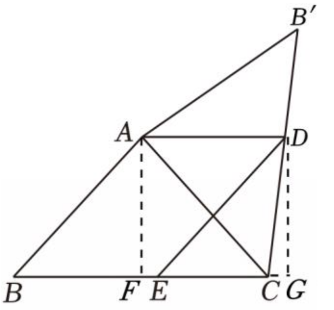


图3

$\because AB = AC = 3$， $BC = 4$，

$\therefore \angle B = \angle ACB$， $BF = FC = 2$，

$\therefore AF = \sqrt{5}$，

由对称可得， $\angle B = \angle B'$， $\angle ACB = \angle ACB'$，

$\because AD // BC$，

$\therefore \angle DAC = \angle ACB$，

$\therefore \angle DAC = \angle ACD$，

$\therefore AD = CD$，

过点 D 作 $DG \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 G，

$\therefore AF // DG$，

$\because AD // EG$，

$\therefore$ 四边形 $AFGD$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $AFGD$ 是矩形，

$\therefore DG = AF = \sqrt{5}$，

设 $AD = CD = x$，

$\therefore FG = x$， $CG = FG - FC = x - 2$，

$\therefore CG^2 + DG^2 = CD^2$，

$\therefore (x-2)^2 + (\sqrt{5})^2 = x^2$，

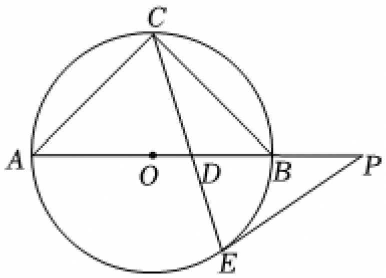
$\therefore x = \dfrac{9}{4}$，

即 $AD = \dfrac{9}{4}$.

21.（12 分）如图，等腰 $Rt\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，点 D 是线段 OB 上异于 O， B 的一点．连接 CD 并延长交 $\odot O$ 于点 E，点 P 在 AB 的延长线上， $PD = PE$.

（1）求证： PE 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $BD = 3OD$，求 $\dfrac{PB}{PE}$ 的值．



【解答】（1）证明：连接OC， OE．

$\because \odot O$是等腰$Rt\triangle ABC$的外接圆， O为AB的中点，

$\therefore OC=OE$， $\angle COB=90^{\circ}$，

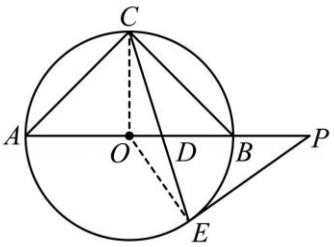
$\therefore \angle OED=\angle OCD$，

$\because PD=PE$，

$\therefore \angle PED=\angle PDE$，

$\because \angle PDE=\angle ODC$，

$\therefore \angle PED=\angle ODC$，



$\because \angle OCD+\angle ODC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle OED+\angle PED=\angle OCD+\angle ODC=90^{\circ}$，

$\therefore OE\perp PE$，

$\therefore PE$是$\odot O$的切线；

（2）解：设$OD=a$，则$BD=3OD=3a$，

此时$OE=OB=4a$，

$\because \triangle POE$是直角三角形，

$\therefore PE^{2}+OE^{2}=PO^{2}$，

$\because PE=PD=PB+BD$，

$\therefore (PB+BD)^{2}+OE^{2}=(PB+OB)^{2}$，

即$(PB+3a)^{2}+(4a)^{2}=(PB+4a)^{2}$，

解得$PB=\dfrac{9a}{2}$，

所以$PE=\dfrac{9a}{2}+3a=\dfrac{15a}{2}$，

所以 $\frac{PB}{PE}=\frac{\frac{9a}{2}}{\frac{15a}{2}}=\frac{3}{5}$.

22．(12 分)【实践课题】通过测量相关距离与角度，计算待建环山路的长度.

【实践工具】测距仪、测角仪等测量工具.

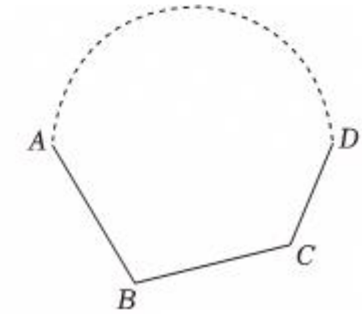
【实践活动】如图，某山的一侧已建成了三段休闲步道，数学实践小组经过现场勘探，画出示意图，休闲步道分别是 AB，BC，CD，且 A，B，C，D 在同一水平面上. 经过多次测量，得到如下数据：$AB=BC=7.5km$，$CD=5km$，$\angle ABC=106.4^{\circ}$，$\angle BCD=126.8^{\circ}$.

【问题解决】城建部门准备在山的另一侧修建一条以 AD 为直径的半圆状环山路（图中虚线部分）.

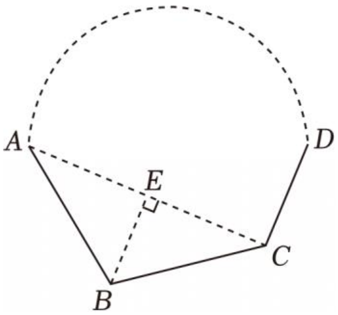
（1）求 A，C 两点间的距离；

（2）求该条待建环山路的长度（结果保留 π）.

（参考数据：$\sin 53.2^{\circ}\approx 0.80$，$\cos 53.2^{\circ}\approx 0.60$，$\sin 73.6^{\circ}\approx 0.96$，$\cos 73.6^{\circ}\approx 0.28$）



【解答】解：（1）如图：连接 AC. 过点 B 作 $BE\perp AC$，垂足为点 E.



$\because BA=BC$，

$\therefore \angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 106.4^{\circ}=53.2^{\circ}$，$EA=EC=\frac{1}{2}AC$.

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$\sin\angle ABE=\frac{AE}{AB}$，

$\therefore AE=AB\sin\angle ABE=7.5\sin\cdot 53.2^{\circ}\approx 7.5\times 0.80=6(km)$.

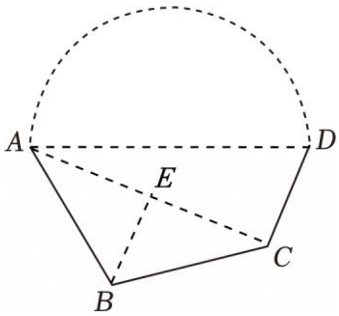
$\therefore AC=2AE=12(km)$.

（2）连接 AD.

$\because BA=BC$，

$\therefore \angle BCA=\angle BAC=\frac{180^{\circ}-106.4^{\circ}}{2}=36.8^{\circ}$，

$\therefore \angle ACD=126.8^\circ-36.8^\circ=90^\circ$.



$\because AC^2+CD^2=AD^2$ ，

$\therefore\ AD=\sqrt{12^2+5^2}=13(km)$.

$\therefore\ \overset{\frown}{AD}$ 的长 $=\dfrac{AD\cdot\pi}{2}=\dfrac{13}{2}\pi(km)$.

答：待建环山路的长度为 $\dfrac{13}{2}\pi km$.

23.（14 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2+(b-2)x+\dfrac{b^2}{4}$.

（1）当 $a=1$ 时，

①求证：该抛物线的顶点不在第三象限；

②若 b 为自然数，且该抛物线与 x 轴有两个不同交点 $(x_1,\ 0)$ 和 $(x_2,\ 0)(x_1<x_2)$ ，求 x_2-x_1 的值.

（2）若 $b<0$ ，直线 $y=ax+m$ 与该抛物线有两个交点 A ， B ，其坐标分别为 $A(0,2-m)$ 和 $B(2,n)$. 当 $t\leqslant x\leqslant t+1$ 时，求 $y=ax^2+(b-2)x+\dfrac{b^2}{4}$ 的最小值.

【解答】（1）①证明：当 $a=1$ 时，代入抛物线 $y=ax^2+(b-2)x+\dfrac{b^2}{4}$ 并化为顶点式得：

$y=x^2+(b-2)x+\dfrac{b^2}{4}=(x-1+\dfrac{b}{2})^2+b-1$ ，

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1-\dfrac{b}{2},b-1)$ ，

若顶点在第三象限，则 $\begin{cases}1-\dfrac{b}{2}<0,\\ b-1<0.\end{cases}$

解得： $\begin{cases}b>2,\\ b<1.\end{cases}$ ，

$\therefore$ 该不等式组无解，

$\therefore$ 抛物线的顶点不在第三象限；

②解： $\because b$ 为自然数，且该抛物线与 x 轴有两个不同交点 $(x_1,\ 0)$ 和 $(x_2,\ 0)(x_1<x_2)$ ，

$\therefore \triangle=(b-2)^2-b^2>0$.

$\therefore b<1$ ，

$\therefore b=0$ ，

$\therefore$ 抛物线为 $y=x^2-2x$，

当 $y=0$ 时，$x_1=0$，$x_2=2$．则 $x_2-x_1=2$；

（2）解：$b<0$，直线 $y=ax+m$ 与该抛物线有两个交点 A，B，其坐标分别为 $A(0,2-m)$ 和 $B(2,n)$，

$\therefore m=2-m$．

解得：$m=1$．

$\therefore \frac{b^2}{4}=1$．

$\because b<0$，

$\therefore b=-2$．

$\therefore y=ax^2-4x+1$，

$\because$ 直线 $y=ax+m$ 与该抛物线有交点 $B(2,n)$，将点 B 的坐标分别代入得：

$\begin{cases}2a+1=n,\\4a-7=n.\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=4\\n=9\end{cases}$，

$\therefore$ 抛物线为 $y=4x^2-4x+1$．

$\therefore y=4x^2-4x+1$ 的图象开口方向向上，对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$．

①当 $t+1\leq\frac{1}{2}$，即 $t\leq-\frac{1}{2}$ 时，$t\leqslant x\leqslant t+1$，$y$ 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=t+1$ 时，y 取最小值为 $4t^2+4t+1$．

②当 $t<\frac{1}{2}<t+1$，即 $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$ 时，$t<x\leq\frac{1}{2}$，y 随 x 的增大而减小，

$\frac{1}{2}<x<t+1$，y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 取最小值为 0.

③当 $t\geq\frac{1}{2}$ 时，$t\leqslant x\leqslant t+1$，$y$ 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=t$ 时，y 取最小值为 $4t^2-4t+1$．

综上可知，当 $t\leq-\frac{1}{2}$ 时，y 取最小值为 $4t^2+4t+1$；当 $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$ 时，y 取最小值为 0；当 $t\geq\frac{1}{2}$ 时，y 取最小值为 $4t^2-4t+1$．