初中学业水平考试（The Academic Test For The Junior High School Students），简称“中考”。是检测初中在校生是否达到初中学业水平的考试；它是初中毕业证书发放的必要条件，考试科目将国家课程方案所规定的学科全部列入初中学业水平考试的范围。

中考是中学生的第一个人生转折点，虽然其重视程度虽然不能完全与高考相比，但是其重要性也不言而喻。中考的知识还是非常基础的，初中绝对不是只考察学生智力的高低，只要认真努力，就能拿下高分。在学习方面更加明白学习是为自己，不是为父母更不是为老师；**现在你吃不了学习的苦，将来你就要受生活的累！**

数学在中考当时是很重要的一个学科，因为它很拉分！我们会发现这么一种有趣的现象，在我们上学的时候，总有学生数学成绩非常的好，老师讲过的他会，老师没讲的他还会，甚至次次数学考试成绩都是满分，于此相对的呢，也总有学生对数学很不感冒，无论怎么努力，数学成绩总是不理想。作为一名数学老师我想说的是，对于努力学习数学，成绩还不理想的同学，这不是你的智商不如他人，只是没有找对学习数学的窍门与方法，我再次强调，初中的知识内容不只是比智商高低。

数学和其它学科不完全相同，光靠死记硬背哪些公式是完全不可行的，同学们要明白数学真正的含义，它是一门思维训练的学科，数学公式只是解题工具。在看到数学题后，我们脑子里要想到相对应的模型，代数式有代数式的模型，几何也有几何的模型，灵活运用，课后多做习题，勤奋才能提高成绩。

本篇文章向各位同学分享初中数学常考常见的几何模型，希望同学可以学会：

一、整体把握、无论题目是熟悉还是陌生、平复心情！

二、审清题意、标注关键词 、翻译问题 、将数学条件转化为数学语言（关系）；

三、明确题型、思路探求、正向/逆向推导、模型联想 、多解法尝试 （特殊值法，排除法，数形结合法，分析法，逆推验证法等）；

四、规范解答、分步计算 、规范书写，（1）（2）（3）步步为营，环环相扣，循序渐进；

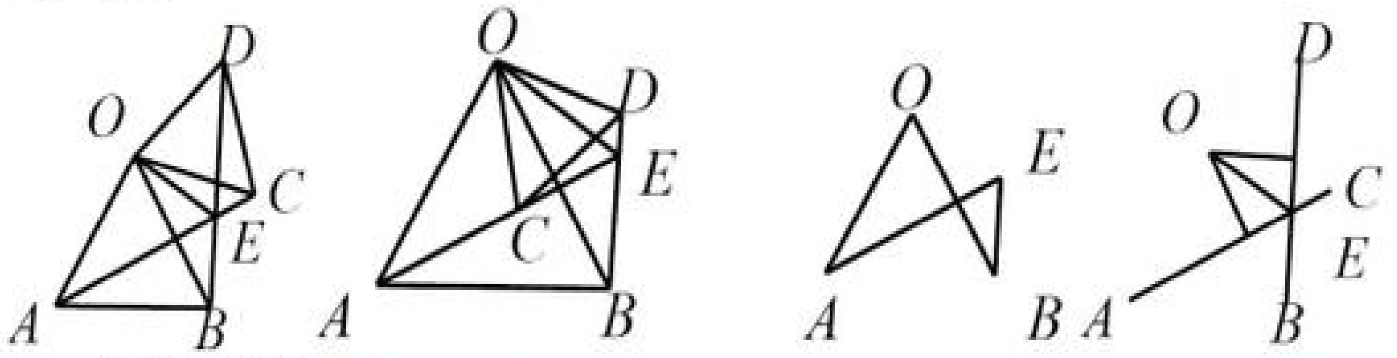
五、检查反思、验证结果，约分是否彻底，是否要带单位，分式方程是否检验，精确是否符合要求，答案位置是否正确等、总结经验 .

总之，即便押题押了个寂寞，那又如何，毕竟自己付出过；付出一定就会有收获！

2025.6.6

➢ 模型一：手拉手模型-旋转型全等

（1）等边三角形



➢ **条件：** $\Delta OAB, \Delta OCD$ 均为等边三角形

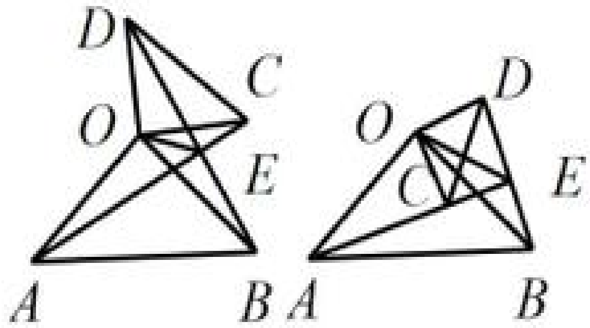
➢ **结论：** ① $\Delta OAC \cong \Delta OBD$；② $\angle AEB = 60^{\circ}$；③ OE 平分 $\angle AED$。

（2）等腰 $RT\Delta$

➢ **条件：** $\Delta OAB, \Delta OCD$ 均为等腰直角三角形

➢ **结论：** ① $\Delta OAC \cong \Delta OBD$；② $\angle AEB = 90^{\circ}$；

➢ ③ OE 平分 $\angle AED$。

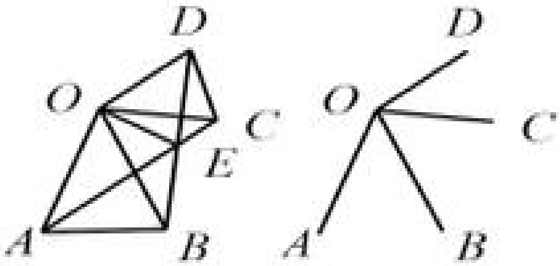


（3）任意等腰三角形

➢ **条件：** $\Delta OAB, \Delta OCD$ 均为等腰三角形

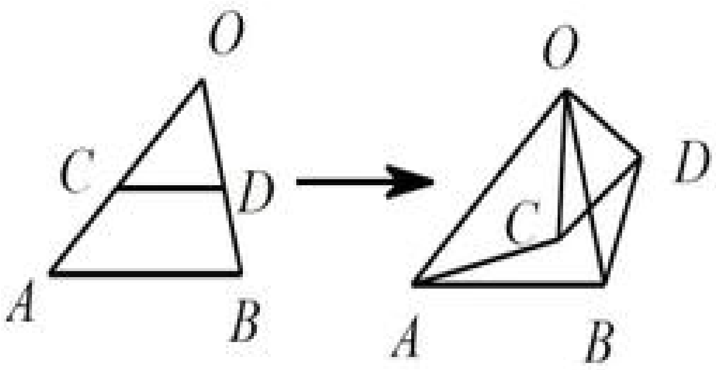
➢ **结论：** ① $\Delta OAC \cong \Delta OBD$；② $\angle AEB = \angle AOB$；

➢ ③ OE 平分 $\angle AED$。



➢ 模型二：手拉手模型-旋转型相似

（1）一般情况



- **条件：** $CD//AB$，将ΔOCD旋转至右图位置
- **结论：**
- 右图中① $\Delta OCD\backsim\Delta OAB\Leftrightarrow\Delta OAC\quad\Delta OBD$；
- ②延长 AC 交 BD 于点 E，必有$\angle BEC=\angle BOA$

（2）特殊情况

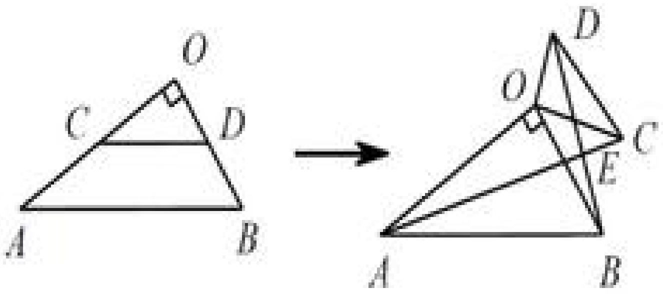
- **条件：** $CD//AB$，$\angle AOB=90°$，将ΔOCD旋转至右图位置
- **结论：** 右图中① $\Delta OCD\backsim\Delta OAB\Leftrightarrow\Delta OAC\quad\Delta OBD$；②延长 AC 交 BD 于点 E，必有$\angle BEC=\angle BOA$；

③ $\dfrac{BD}{AC}=\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{OB}{OA}=\tan\angle OCD$；

④ $BD\perp AC$；

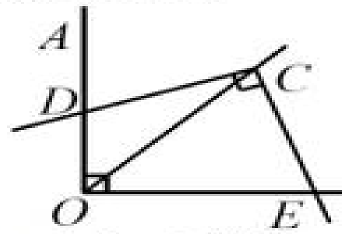
⑤连接 AD、BC，必有$AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$；

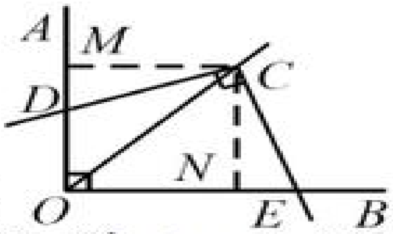
⑥ $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\times BD$ （对角线互相垂直的四边形）



➢ 模型三：对角互补模型

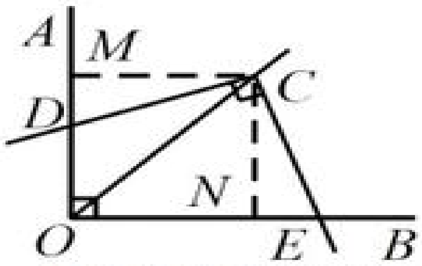
（1）全等型-90°

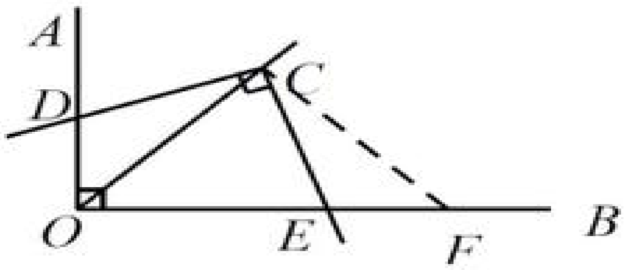




- **条件：** ① $\angle AOB=\angle DCE=90°$；② OC 平分$\angle AOB$
- **结论：** ① CD=CE; ② $OD+OE=\sqrt{2}OC$；③ $S_{ODCE}=S_{\Delta OCD}+S_{\Delta OCE}=\frac{1}{2}OC^2$
- **证明提示：**

①作垂直，如图，证明$\Delta CDM\cong\Delta CEN$；





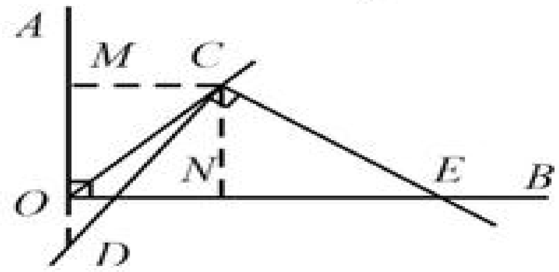
②过点 C 作 $CF\perp OC$，如上图（右），证明$\Delta ODC\cong\Delta FEC$；

- 当$\angle DCE$的一边交 AO 的延长线于点 D 时：

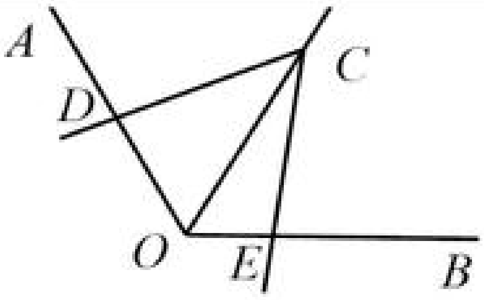
以上三个结论： ① CD=CE（不变）；

② $OE-OD=\sqrt{2}OC$；③ $S_{\Delta OCE}-S_{\Delta OCD}=\frac{1}{2}OC^2$

此结论证明方法与前一种情况一致，可自行尝试。



（2）全等型-120°



➢ **条件：**①$\angle AOB = 2\angle DCE = 120°$；

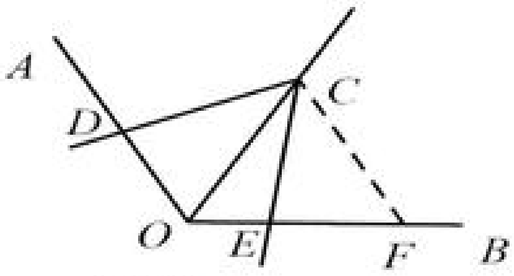
➢ ②OC **平分** $\angle AOB$；

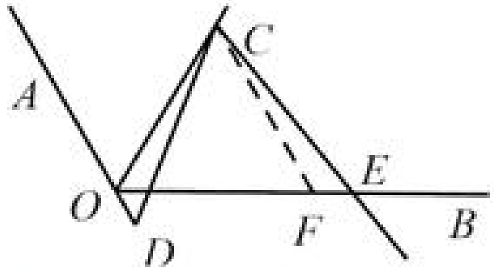
➢ **结论：**①$CD = CE$；②$OD + OE = OC$；

➢ ③$S_{ODCE} = S_{\Delta OCD} + S_{\Delta OCE} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}OC^2$

➢ **证明提示：**①可参考"全等型-90°"证法一；

②如图：在 OB 上取一点 F，使 $OF=OC$，证明 ΔOCF 为等边三角形。





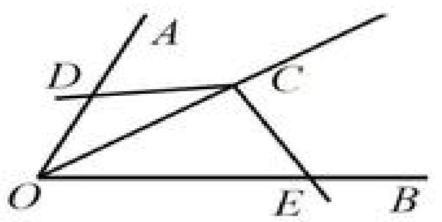
➢ 当 $\angle DCE$ 的一边交 AO 的延长线于点 D 时（如上图右）：

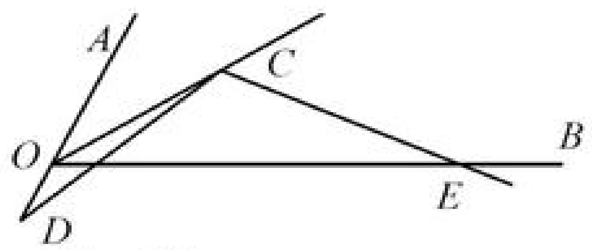
原结论变成：①________________________；②________________________；

③____________________________；

可参考上述第②种方法进行证明。

（3）全等型-任意角α





➢ **条件：**①$\angle AOB = 2\alpha, \angle DCE = 180 - 2\alpha$；②$CD = CE$；

➢ **结论：**①OC **平分** $\angle AOB$；②$OD + OE = 2OC \cdot \cos\alpha$；

➢ ③$S_{ODCE} = S_{\Delta OCD} + S_{\Delta OCE} = OC^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

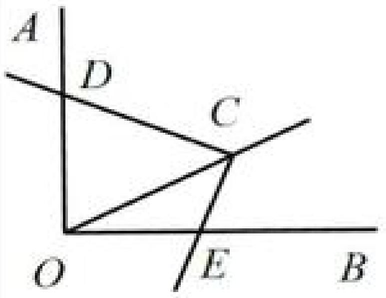
➢ 当 $\angle DCE$ 的一边交 AO 的延长线于点 D 时（如右上图）：

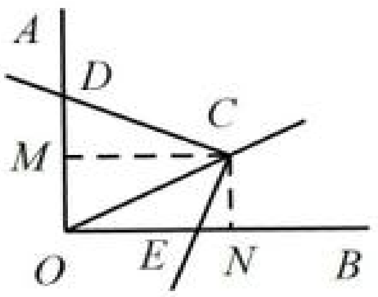
原结论变成：①________________________；②________________________；

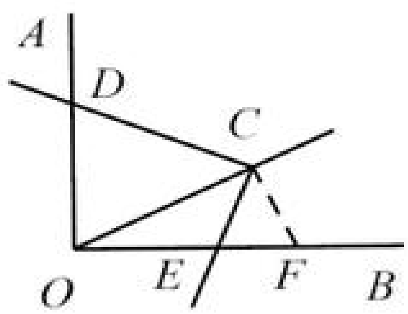
③____________________________；

可参考上述第②种方法进行证明。**请思考初始条件的变化对模型的影响。**

如图所示，若将条件"OC 平分 $\angle AOB$"去掉，条件①不变，OC 平分 $\angle AOB$，结论变化如下：







结论：①$CE = CD \cdot \tan\alpha$；②$(CD \cdot \tan\alpha + OE)\cos\alpha = OC$；

③$S_{\Delta OCD} \cdot \tan^2\alpha + S_{\Delta OCE} = \dfrac{1}{2}OC^2 \cdot \tan\alpha$.

证明：过点 C 作 $CF \perp OC$，交 OB 于点 F

$\because \angle DCE = \angle OCF = 90°$

$\therefore \angle DCO = \angle ECF$

$\because \angle AOB + \angle DCE = 180°$

$\therefore \angle CDO + \angle CEO = 180°$

$\therefore \angle CDO = \angle CEF$

$\therefore \Delta CDO \backsim \Delta CEF$

$\therefore \dfrac{EF}{DO} = \dfrac{CE}{CD} = \dfrac{CF}{CO} = \tan\alpha$ （关键步）

$\therefore$ 结论①得证

$\therefore EF = OD \cdot \tan\alpha$

$\because (OE + EF) \cdot \cos\alpha = OC$

$\therefore$ 结论②得证

$\therefore \dfrac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CDO}} = (\dfrac{CF}{CO})^2 = \tan^2\alpha$

$\therefore S_{\Delta CEF} = S_{\Delta CDO} \cdot \tan^2\alpha$

$\because S_{\Delta OCE} + S_{\Delta CEF} = S_{\Delta OCF}$

且 $S_{\Delta OCF} = \dfrac{1}{2}OC^2 \cdot \tan\alpha$

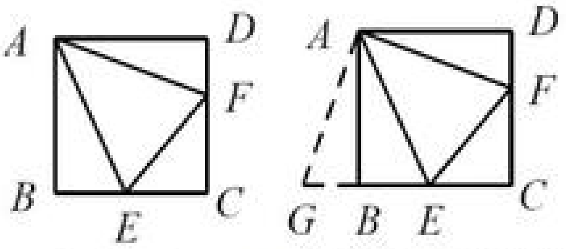
$\therefore$ 结论③得证

➢ **对角互补模型总结：**

①常见初始条件，四边形对角互补

➢ 模型四：角含半角模型 90°

（1）角含半角模型 90° -1



➢ **条件：**①正方形 $ABCD$；② $\angle EAF = 45^\circ$；

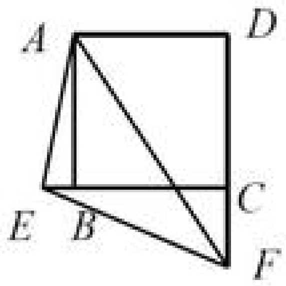
➢ **结论：**① $EF = DF + BE$；② ΔCEF 的周长为正方形 $ABCD$ 周长的一半；

也可以这样：

➢ **条件：**①正方形 $ABCD$；② $EF = DF + BE$

➢ **结论：** $\angle EAF = 45^\circ$

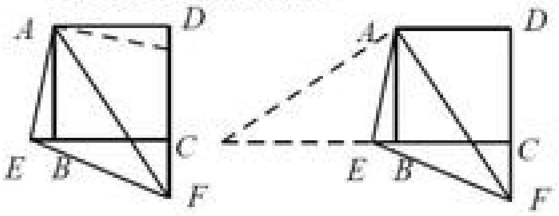
（2）角含半角模型 90° -2



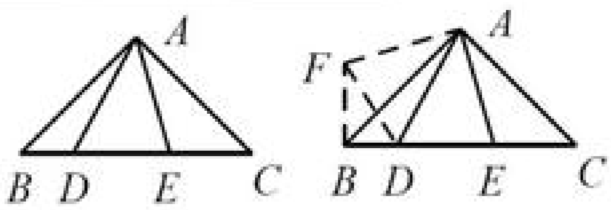
➢ **条件：**①正方形 $ABCD$；② $\angle EAF = 45^\circ$；

➢ **结论：** $EF = DF - BE$

➢ **辅助线如下图所示：**



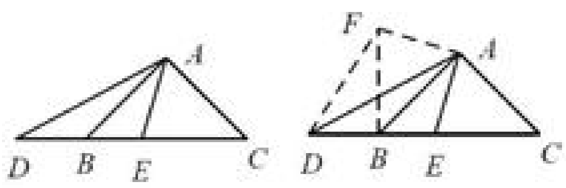
（3）角含半角模型 90° -3



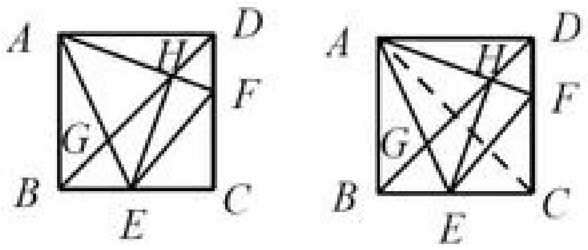
➢ **条件：**① $RT\Delta ABC$；② $\angle DAE = 45^\circ$；

➢ **结论：** $BD^2 + CE^2 = DE^2$

若 $\angle DAE$ 旋转到 ΔABC 外部时，结论 $BD^2 + CE^2 = DE^2$ 仍然成立。



（4）角含半角模型 90° 变形



证明：连接 AC（方法不唯一）

$\because \angle DAC = \angle EAF = 45^\circ$，$\therefore \angle DAH = \angle CAE$

$\because \angle ADH = \angle ACE = 45^\circ$，$\therefore \Delta ADH \backsim \Delta ACE$

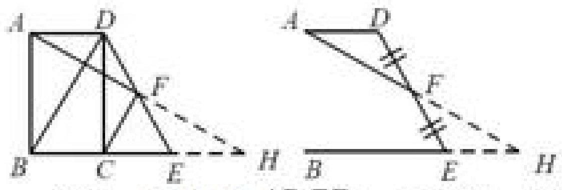
$\therefore \dfrac{DA}{AH} = \dfrac{AC}{AE}$ $\therefore \Delta AHE \backsim \Delta ADC$

➢ **条件：**①正方形 $ABCD$；②$\angle EAF = 45^\circ$；

➢ **结论：**ΔAHE 为等腰直角三角形。

➢ 模型五：倍长中线类模型

（1）倍长中线类模型-1



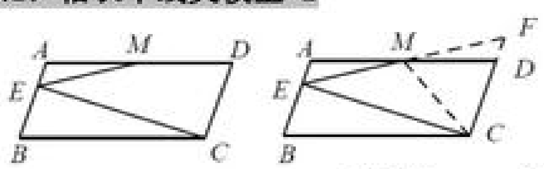
➢ **条件：**①矩形 $ABCD$；②$BD = BE$；③$DF = EF$；

➢ **结论：**$AF \perp CF$

模型提取：①有平行线 $AD // BE$；②平行线间线段有中点 $DF = EF$；

可以构造“8”字全等 $\Delta ADF \cong \Delta HEF$。

（2）倍长中线类模型-2



➢ **条件：**①平行四边形 $ABCD$；②$BC = 2AB$；③$AM = DM$；④$CE \perp AD$.

➢ **结论：**$\angle EMD = 3\angle MEA$

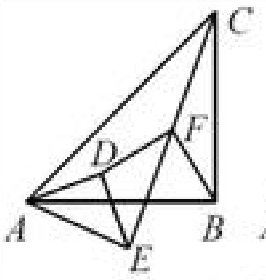
辅助线：有平行 $AB // CD$，有中点 $AM = DM$

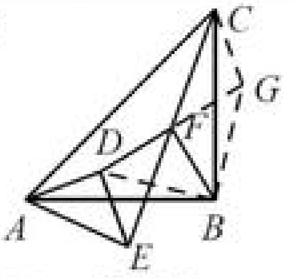
延长 EM，构造 $\Delta AME \cong \Delta DMF$，连接 CM 构造等腰 ΔEMC，ΔMCF

通过构造 8 字全等线段数量及位置关系，角的大小转化

➢ 模型六：相似三角形 360° 旋转模型

（1）相似三角形（等腰直角）360° 旋转模型-倍长中线法





辅助线：延长 DF 到点 G，使 $FG=DF$，连接 CG、BG、BD 证明 ΔBDG 为等腰直角

突破点：$\Delta ABD \cong \Delta CBG$

难点：证明 $\angle BAD=\angle BCG$

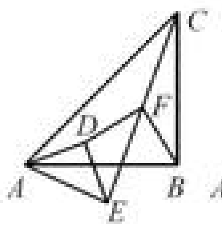
➢ **条件：**①ΔADE、ΔABC 均为等腰直角三角形；②$EF=CF$

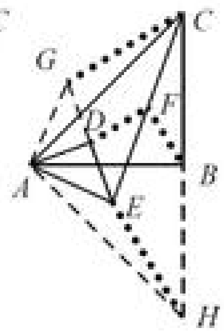
➢ **结论：**①$DF=BF$；②$DF\perp BF$

（1）相似三角形（等腰直角）360° 旋转模型-补全法

➢ **条件：**①ΔADE、ΔABC 均为等腰直角三角形；②$EF=CF$；

➢ **结论：**①$DF=BF$；②$DF\perp BF$





辅助线：构造等腰直角 ΔAEG、ΔAHC

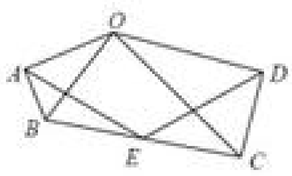
辅助线思路：将 DF 与 BF 转化到 CG 与 EH

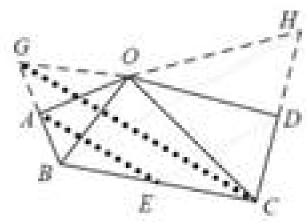
（2）任意相似直角三角形 360° 旋转模型-补全法

➢ **条件：**①$\Delta OAB\backsim\Delta ODC$；②$\angle OAB=\angle ODC=90^\circ$；③$BE=CE$。

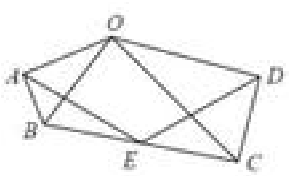
➢ **结论：**①$AE=DE$；②$\angle AED=2\angle ABO$

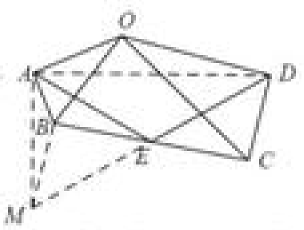
辅助线：延长 BA 到点 G，使 $AG=AB$，延长 CD 到点 H 使 $DH=CD$，补全 ΔOGB、OCH 构造旋转模型，转化 AE 与 DE 到 CG 与 BH，难点在转化 $\angle AED$





（2）任意相似直角三角形 360° 旋转模型-倍长法





➢ **条件：**①$\Delta OAB\backsim\Delta ODC$；②$\angle OAB=\angle ODC=90^\circ$；③$BE=CE$。

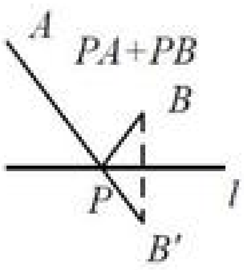
➢ **结论：**①$AE=DE$；②$\angle AED=2\angle ABO$

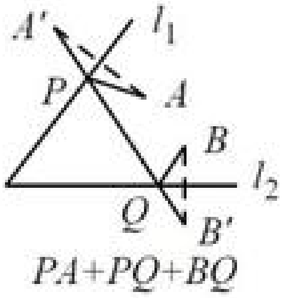
辅助线：延长 DE 至 M，使 $ME=DE$，将结论的两个条件转化为证明 $\Delta AMD\backsim\Delta ABO$，此为难点，将 $\Delta AMD\backsim\Delta ABC$ 继续转化为证明 $\Delta ABM\backsim\Delta AOD$，使用两边成比且夹角等

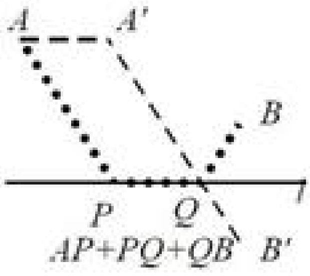
此处难点在证明 $\angle ABM=\angle AOD$

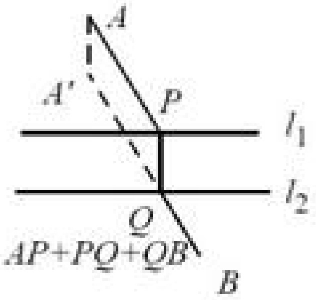
➢ 模型七：最短路程模型

（1）最短路程模型一（将军饮马类）







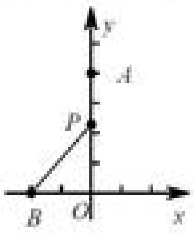


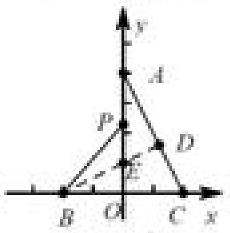
总结：以上四图为常见的轴对称类最短路程问题，

最后都转化到："两点之间，线段最短"解决

特点：①动点在直线上；②起点，终点固定

（4）最短路程模型二（点到直线类3）





➢ **条件：** $A(0,4),B(-2,0),P(0,n)$

➢ **问题：** n 为何值时，$PB+\frac{\sqrt{5}}{5}PA$ 最小

➢ **求解方法：** ① x 轴上取 $C(2,0)$，使 $\sin\angle OAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$；②过 B 作 $BD\perp AC$，交 y 轴于点 E，即为所求；③ $\tan\angle EBO=\tan\angle OAC=\frac{1}{2}$，即 $E(0,1)$.

（5）最短路程模型三（旋转类最值模型）

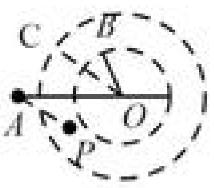
条件：①线段 $OA=4$，$OB=2$（$OA>OB$）

② OB 绕点 O 在平面内 360° 旋转

问题：AB 的最大值，最小值分别为多少？

结论：以点 O 为圆心，OB 为半径作圆，如图所示，将问题转化为"三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边"

最大值：$OA+OB$；最小值：$OA-OB$



条件：①线段 $OA=4$，$OB=2$

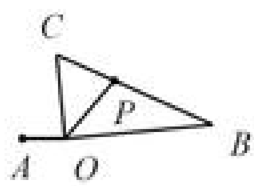
②以点 O 为圆心，OB，OC 为半径作圆

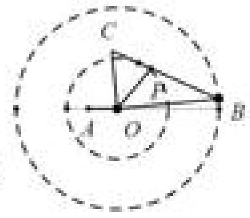
③点 P 是两圆所组成圆环内部（含边界）一点

问题：若 PA 的最大值为10，则 $OC=6$

若 PA 的最小值为1，则 $OC=3$

若 PA 的最小值为2，则 PC 的取值范围是 $0<PC\le 2$





条件：① $Rt\Delta OBC$，$\angle OBC=30^\circ$

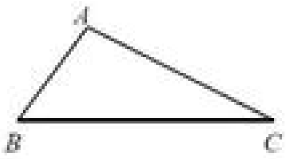
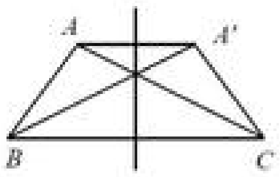
② $OC=2$；③ $OA=1$；④点 P 为 BC 上动点（可与端点重合）；⑤ ΔOBC 绕点 O 旋转

结论：PA 最大值为 $OA+OB=1+2\sqrt{3}$

PA 最小值为 $\frac{1}{2}OB-OA=\sqrt{3}-1$

如右图，圆的最小半径为 O 到 BC 垂线段长

➢ 模型八：二倍角模型

条件：ΔABC 中，$\angle B=2\angle C$

辅助线：以 BC 的垂直平分线为对称轴，作点 A 的对称点 A'，连接 AA'、BA'、CA'

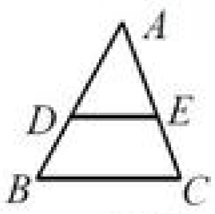
则 BA' 为 $\angle ABC$ 的角平分线，

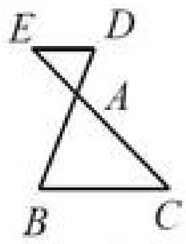
那么 $BA=AA'=CA'$（注意这个结论）

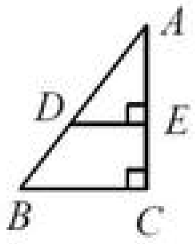
此种辅助线的作法是二倍角三角形常见的辅助线作法之一，但并不是唯一作法

➢ 模型九：相似三角形模型

（1）相似三角形模型-基本型


A字型

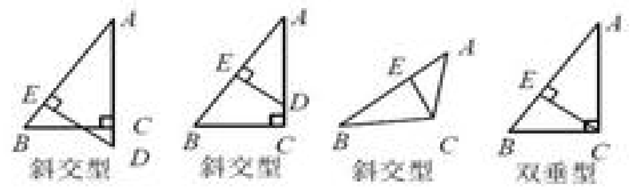

8字型


A字型

平行类：$DE//BC$

结论：$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$（注意对应边要对应）

（2）相似三角形模型-斜交型



条件：如左面两个图 $\angle AED=\angle ACB=90^\circ$

结论：$AE\times AB=AC\times AD$

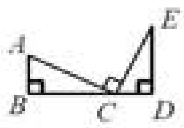
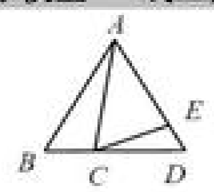
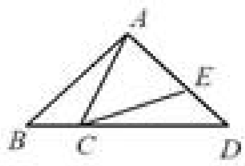
条件：如右面两个图 $\angle ACE=\angle ABC$

结论：$AC^2=AE\times AB$

第四个图还存在 $AB\times EC=BC\times AC$

$BC^2=BE\times BA$，$CE^2=BE\times AE$

（3）相似三角形模型-一线三角型

条件：左图：$\angle ABC=\angle ACE=\angle CDE=90^\circ$

中图：$\angle ABC=\angle ACE=\angle CDE=60^\circ$

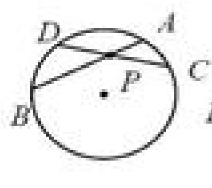
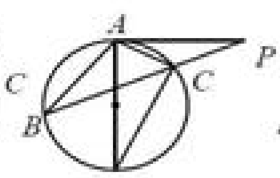
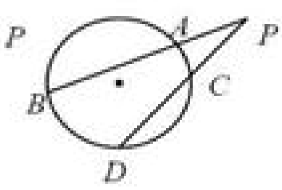
右图：$\angle ABC=\angle ACE=\angle CDE=45^\circ$

结论：所有图形都存在的结论

① $\Delta ABC\backsim\Delta CDE$；② $AB\times DE=BC\times CD$

一线三等角模型也经常用来建立方程或函数关系

（4）相似三角形模型-圆幂定理型

条件：中图，PA 为圆的切线

结论：左图：$PA\times PB=PC\times PD$

中图：$PA^2=PC\times PB$

右图：$PA\times PB=PC\times PD$

以上结论均可以通过相似三角形进行证明

问题背景：古代有一位将军，清晨习惯性地从营地 A 牵着自己的爱马，来到河边 P 处喝水，喝完水之后，再牵着马去到练兵场 B(图 10.50)，在此过程中，将军就想如何能让总路程(AP+BP)最短，实现体力的最小消耗．我们把此问题称为将军饮马问题，进而产生了一系列的变式问题，见表 10.4.

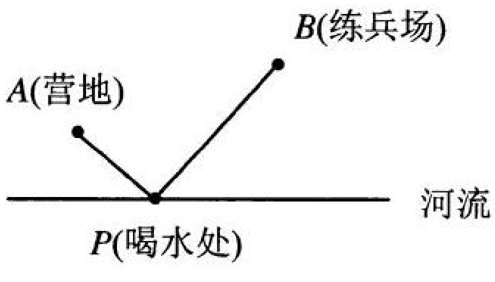
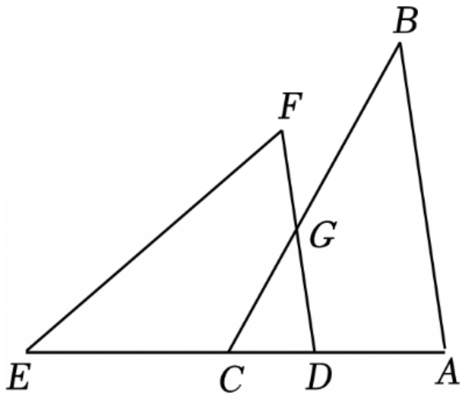
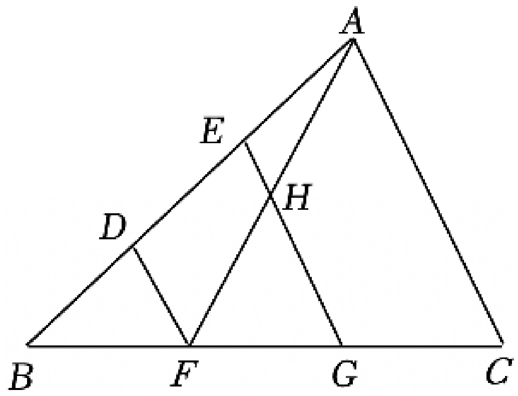


图 10. 50





【典例 1】(2025 • 海南模拟) 如图，点 E、C、D、A 在同一条直线上，$AB // DF$，$AB = DE$，$\angle B = \angle E$，线段 BC 与线段 DF 交于点 G．

(1) 求证：$\triangle ABC \cong \triangle DEF$；

(2) 若 $\angle BGF = 38°$，$\angle A = 82°$，求 $\angle F$ 的度数．

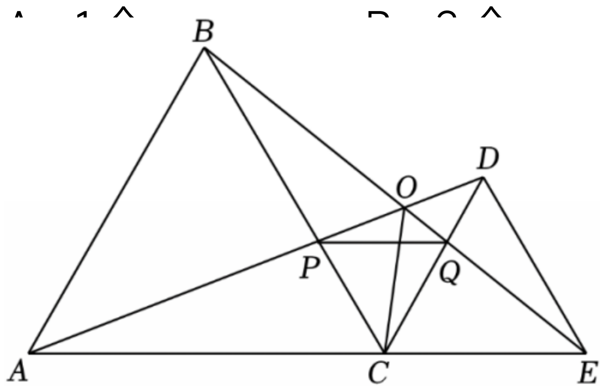
【典例 2】（2025 • 安阳模拟）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E，F，G 分别为 AB，BC 边的三等分点，点 H 为 AF 与 EG 的交点．若 $AC = 6$，则 EH 的长为(　　)

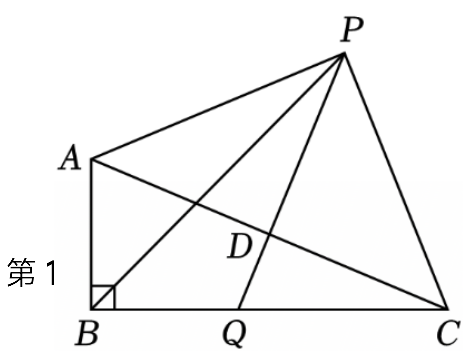
A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

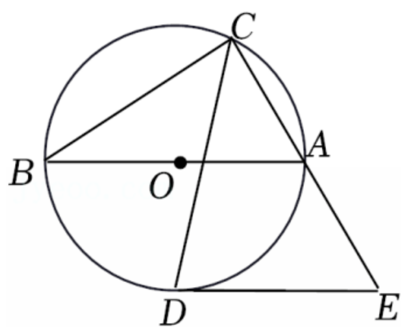
【典例 3】（2025 • 南岗区校级三模）如图，点 C 为线段 AE 上一动点（不与 A、E 重合），在 AE 同侧分别作等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle CDE$，AD 与 BE 交于点 O，AD 与 BC 交于点 P，BE 与 CD 交于点 Q，连接 PQ，以下四个结论①$\angle AOB = 60°$；②$PQ // AE$；③OC 平分 $\angle AOE$；④$OC + OD = OE$，其中正确结论的序号为 ____ ．

【典例 4】(2025 • 思明区校级模拟) 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 90°$，$AB < BC$，AC 的中垂线与 $\angle ABC$ 的平分线相交于点 P，与 BC 相交于点 Q，与 AC 相交于 D，联结 PA、PC．若 $PQ = PC$，下列结论：①$PA = PC$；②$\triangle PAB \cong \triangle PQB$；③$\angle PAC = 45°$；④$PB^2 - PQ^2 = BQ \cdot BC$．其中正确的有(　　)

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个







【典例5】．（2025•淮阴区校级一模）如图，$\triangle ABC$内接于$\odot O$，AB为$\odot O$的直径，$\angle ACB$的平分线交$\odot O$于D，过点D作$DE//AB$交CA的延长线于E.

（1）求证：DE是$\odot O$的切线；

（2）当$AC=6$，$BC=8$时，求DE的长．

【典例6】．（2025•昭平县二模）如图，AB是$\odot O$的直径，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{EC}$，过点$B$作$\odot O$的切线，交$AE$的延长线于点$D$，连接$BC$交$AE$于点$F$.

（1）求证：$\angle BAC=\angle AFC$；

（2）若$CF=1$，$BF=2$，求BD的长．

【典例7】．（2025•淮南三模）如图，AB是$\odot O$的直径，点C是$\odot O$上一点，CP为$\odot O$的切线，弦$AD//CP$，DB的延长线交CP于点P，连接AC，BC.

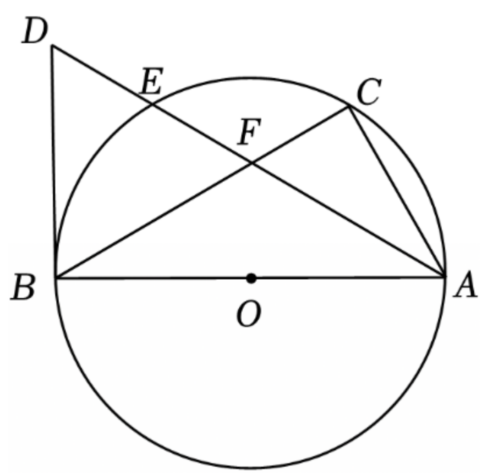
（1）求证：$\angle ABD=2\angle BDC$；

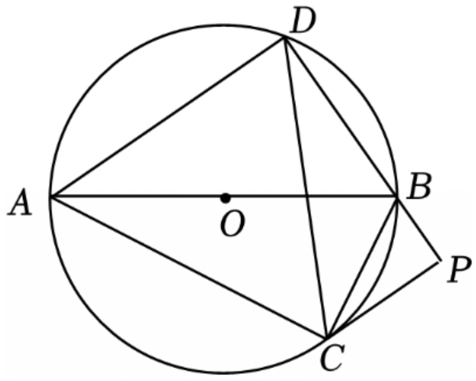
（2）若$BD=3PB=6$，求AD的长．

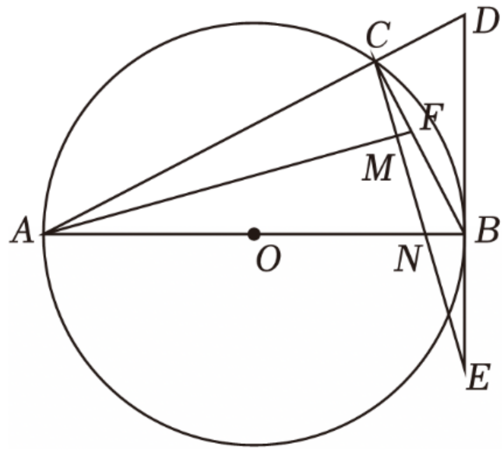
【典例8】．（2025•凉州区一模）如图，AB是$\odot O$的直径，C为$\odot O$上一点，延长AC到点D，过点D作DE切$\odot O$于点B，连接CE，BC，$AF\perp CE$于点M，交BC于点F，CE交AB于点N.

（1）求证：$\angle CAB=\angle CBD$；

（2）若$AB=10$，$FB=4$，$CD=3$，求DE的长．



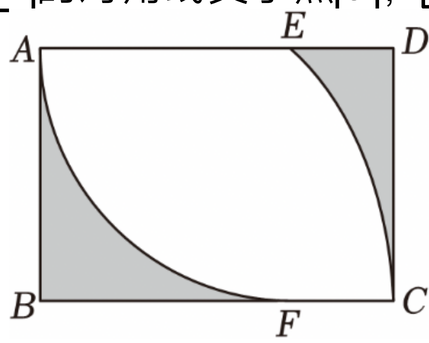


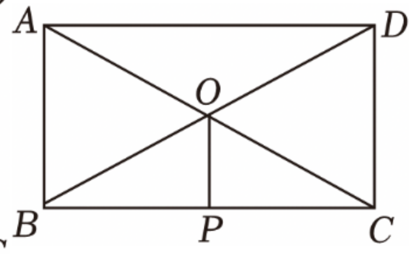


【典例9】．（2025•北碚区模拟）如图，在矩形$ABCD$中，以B为圆心，BC长为半径画弧，交AD于点E．以E为圆心，AE长为半径画弧，与BC相切于点F．若$AB=1$，则图中阴影部分的面

积为______ .

【典例 10】．（2024 • 桐柏县一模）如图，矩形$\boxed{ABCD}$的对角线交于点$\boxed{O}$，$\boxed{AB=2}$，$\boxed{BC=2\sqrt{3}}$，点$\boxed{P}$是$\boxed{BC}$上的动点，则$\boxed{OP+\frac{1}{2}BP}$的最小值是 ______.





类①：两定一动

1. 如图 10.51 所示,在矩形 ABCD 中，AB = 8,AD = 6,动点 P 满足 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}S$矩形 ABCD,则点 P 到A，B 两点距离之和 PA + PB 的最小值为________.$8\sqrt{2}$

2.如图 10.52 所示,点 P 为矩形 ABCD 的对角线 AC 上的一个动点,点 E 为 BC 的中点,连接 PE,PB.若 AB = 4,BC = $4\sqrt{3}$,则 PE + PB 的最小值为___6___.

3. 如图 10.53 所示,MN 是⊙O 的直径，MN = 4,,点 A 在⊙O 上，∠AMN = 30°,B 为 $\frown$AN 的中点，P 是直径 MN 上的一个动点，则．PA + PB+PB 的最小值为__$2\sqrt{2}$______.

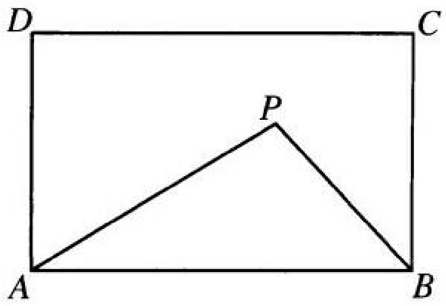


图 10. 51

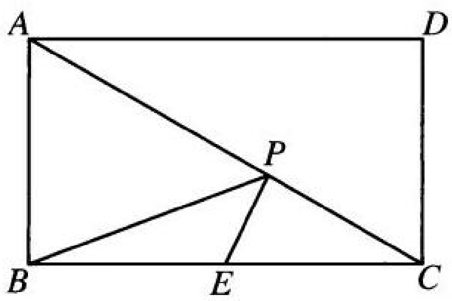


图 10. 52

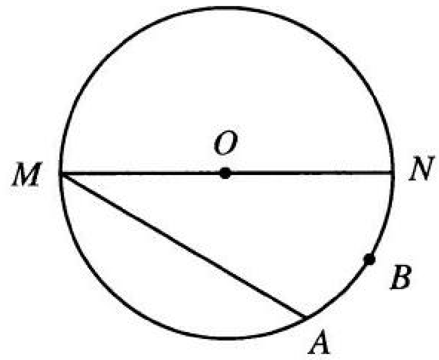


图 10. 53

类②：两定两动

1. 如图 10.56 所示，∠AOB = 30°,点 M,N 分别在边 OA,OB 上,且 OM = 1,ON = 3,点 P,Q 分别在边 OB,OA 上,则 MP + PQ + QN 的最小值是_$\sqrt{10}$.

2. 如图 10.58 所示,在矩形 ABCD 中，AB = 6,AD = 4,点 E,F 分别是 AB,DC 上的动点， EF∥BC,则 AF + CE 的最小值是_10_.

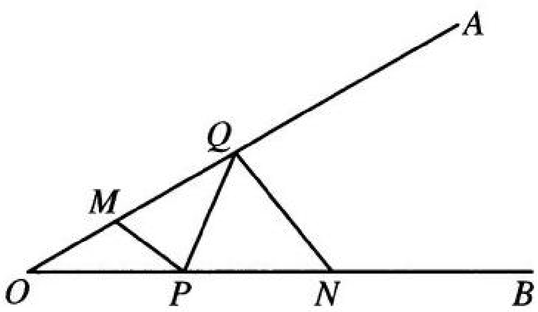


图 10. 56

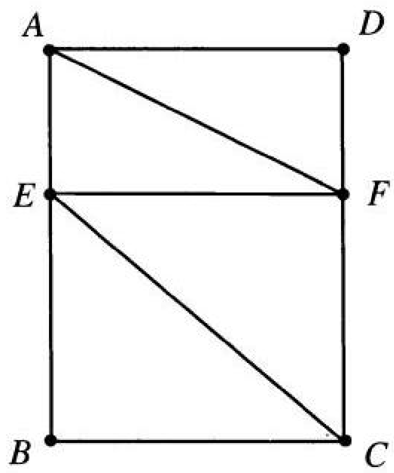


图 10. 58

类③：一定两动(两点之间线段最短)

1. 如图 10.61 所示，∠AOB = 30°,∠AOB 内有一定点 P，且(OP = 10..在 OA 上有一点 Q,OB 上有一点 R.若△ PQR 周长最小，则最小周长是________.

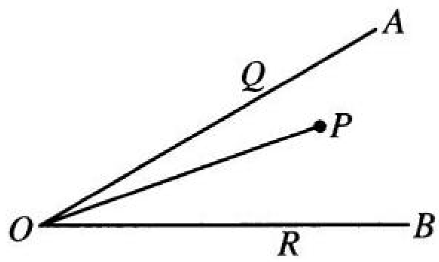


图 10. 61

2.变式:如图 10.62 所示,P 为 ∠MON 内部的已知点，A 为 OM 上的点，B 为 ON 上的点，当 △PAB 周长的最小值与 OP 的长度相等时，∠MON = ______.

3. 如图 10.65 所示,在矩形 ABCD 中，AB = 2,BC = 4,P,Q 分别是 BC,AB 上的两个动点，AE = 1, △AEQ 沿 EQ 翻折形成 △FEQ,连接 PF,PD,则 PF + PD 的最小值是______

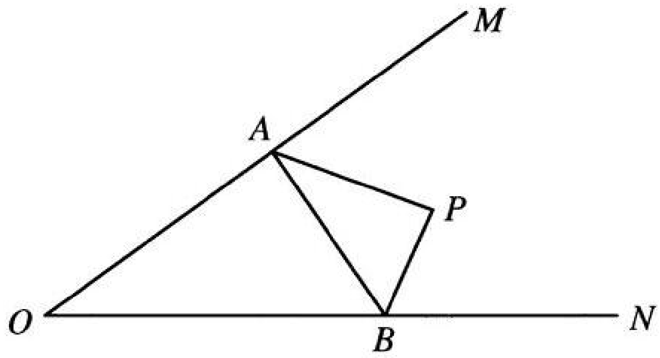


图 10.62

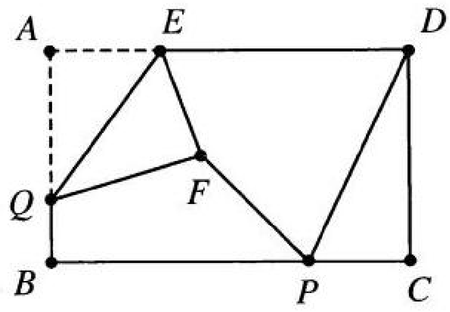


图 10.65

<u>类④：一定两动(垂线段最短)</u>

1. 如图 10.67 所示，∠BAC = 30°,M 为 AC 上一点， AM = 2,点 P 是 AB 上的一动点，点 Q 是 AC 上的一动点，则. PM + PQ 的最小值为______.

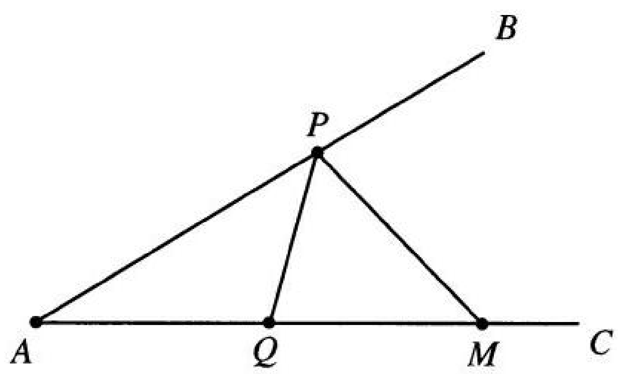


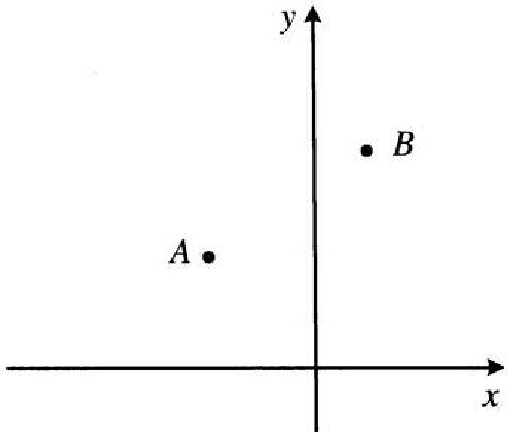
图 10.67

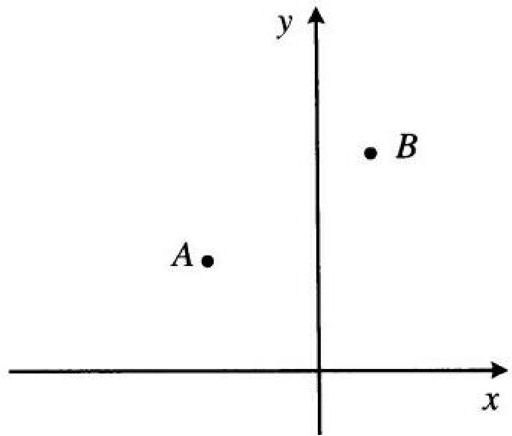
<u>类⑥：最大值问题</u>

1. 如图 10.73 所示,在平面直角坐标系中有两点 A(-2,2),B(1,4),根据要求求出点 P 的坐标:

(1) 在 x 轴上找一点 P,使得|PA-PB|最大.

(2) 在 y 轴上找一点 P,使得|PA-PB|最大.





初中数学公式大全

知识点	公式
绝对值	$\left\|a\right\|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$
实数的运算律	1.加法交换律：$a+b=b+a$； 2.加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$； 3.乘法交换律：$ab=ba$； 4.乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$； 5.乘法分配律：$a(b+c)=ab+ac$．
幂的运算	1. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　2. $(ab)^m=a^m b^m$； 3. $(a^m)^n=a^{mn}$；　4. $a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0)$； 5. $a^0=1(a\neq 0)$；　6. $a^{-p}=\frac{1}{a^p}(a\neq 0)$； 7. n为正偶数时：$(-a)^n=a^n,(a-b)^n=(b-a)^n$； n为正奇数时：$(-a)^n=-a^n,(a-b)^n=-(b-a)^n$．
整式的运算	1.整式的加减：$mA\pm nA=(m\pm n)A$（A为整式,m,n为实数）； 2.多项式乘多项式：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$； 3.平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$； 4.完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$； 5.多项式除以单项式：$(a+b+c)\div m=a\div m+b\div m+c\div m$．
	1.若$a=b,b=c$，则$a=c$；　2.若$a=b$，则$a\pm c=b\pm c$；　3.若$a=b$，则$ac=bc$；

等式的性质	4.若 $a=b$，则 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}(c\neq 0)$； 5.若 $a=b$，则 $a^{m}=b^{m}$.
分式的运算	1.$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC},\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}(A,B,C$为整式且$B,C\neq 0)$； 2.$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}(bd\neq 0)$； 3.$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}(bcd\neq 0)$； 4.$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}(c\neq 0)$； 5.$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad\pm bc}{cd}(cd\neq 0)$； 6.$(\frac{a}{b})^{m}=\frac{a^{m}}{b^{m}}(b\neq 0)$； 7.$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}(b\neq 0)$.
根式的性质	1.$\sqrt{a}\geq 0(a\geq 0)$； 2.$\sqrt{a^{2}}=\sqrt{(-a)^{2}}=\lvert a\rvert$； 3.$(\sqrt{a})^{2}=a(a\geq 0)$； 4.$\sqrt[3]{a^{3}}=(\sqrt[3]{a})^{3}=a$； 5.$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$； 6.$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geq 0,b\geq 0)$； 7.$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geq 0,b>0)$.
不等式的性质	1.若$a>b$,则$b<a$； 2.若$a>b$,则$a\pm c>b\pm c$；若$a<b$,则$a\pm c<b\pm c$； 3.若$a>b,c>0$,则$ac>bc,\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$； 4.若$a>b,c<0$,则$ac<bc,\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$； 5.若$a>b,b>c$,则$a>c$.
一元二次方程	1.一元二次方程 $ax^{2}+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的判别式 $\Delta=b^{2}-4ac$： ①当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；②当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；③当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根. 2.一元二次方程 $ax^{2}+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}(b^{2}-4ac\geq 0)$； 3.一元二次方程 $ax^{2}+bx+c=0(a\neq 0)$ 根与系数关系：$x_{1}+x_{2}=-\frac{b}{a},x_{1}\cdot x_{2}=\frac{c}{a}$.
二次函数	1.一般式：$y=ax^{2}+bx+c(a\neq 0)$，其顶点坐标是$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^{2}}{4a}\right)$，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$； 2.顶点式：$y=a(x-h)^{2}+k(a\neq 0)$，其顶点坐标是(h,k)，对称轴为直线 $x=h$； 3.交点式：$y=a(x-x_{1})(x-x_{2})(a\neq 0)$，其中 x_{1},x_{2} 是函数图象和横轴交点的横坐标，对称轴为

	$x=\frac{x_1+x_2}{2}$.
直角三角形	1.勾股定理：在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC^2+BC^2=AB^2$（直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方）； 2.三角函数：在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{BC}{AB}$, $\sin B=\frac{AC}{AB}$, $\cos A=\frac{AC}{AB}$, $\cos B=\frac{BC}{AB}$， $\tan A=\frac{BC}{AC}$, $\tan B=\frac{AC}{AB}$.
长度和面积	1.三角形：$S_{\Delta}=\frac{1}{2}ah$,（a为底，h为高）；$S_{等边三角形}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$（$a$为等边三角形的边长）； 2. $S_{平行四边形}=ah$（a为底，h为高） 3. $S_{菱形}=ah=\frac{1}{2}mn$（a为底，h为高，m,n为两条对角线的长） 4.矩形的一组邻边长分别为 a,b，其周长为 $2(a+b)$，面积为 ab； 5.正方形的边长为 a，其周长为 $4a$，面积为 a^2； 6.圆：它的半径为 R,它的周长为 $2\pi R$，它的面积为 πR^2； 7.扇形：它的半径为 R，圆心角度数为 n，它的弧长为 $l=\frac{n\pi R}{180}$，面积为 $S=\frac{1}{2}lR=\frac{n\pi R^2}{360}$.
自然数	1.常用的勾股数：3,4,5;5,12,13;7,24,25;8,15,17;9,40,41； 2.平方数：$11^2=121$;$12^2=144$;$13^2=169$;$14^2=196$;$15^2=225$;$16^2=256$;$17^2=289$； $18^2=324$;$19^2=361$;$20^2=400$;$21^2=441$;$22^2=484$;$23^2=529$;$24^2=576$;$25^2=625$； $26^2=676$;$27^2=729$;$28^2=784$;$29^2=841$;$30^2=900$； 3.立方数：$2^3=8$;$3^3=27$;$4^3=64$;$5^3=125$;$6^3=216$;$7^3=343$;$8^3=512$;$9^3=729$.

1、重心定义：三角形三条中线的交点.
性质：重心将每条中线分为 2:1 两段；与顶点连线构成的三个三角形面积相等.
2、外心定义：三角形三边垂直平分线的交点，即外接圆的圆心.
性质：外心到三个顶点的距离相等，等于外接圆半径；锐角三角形外心在内部，直角三角形在斜边中点.
3、内心定义：三角形三条内角平分线的交点，即内切圆的圆心.
性质：内心到三边的距离相等；三角形的内心是旁心三角形的垂心.
4、垂心定义：三角形三条高的交点.

性质：垂心与顶点连线构成的三角形，原三角形为垂足三角形的内心；直角三角形垂心在直角顶点.

5、旁心定义：三角形一个内角平分线与另外两个外角平分线的交点，钝角三角形有三个旁心.

性质：旁心到三角形三边所在直线的距离相等；每个旁心对应一个旁切圆.