模拟组卷 3

参考答案与试题解析

一．选择题（共 4 小题）

1．已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数），开口向上，过 $A(1,0)$，$B(m,0)$ 两点，且 $-2<m<-1$．下列四个结论中正确的结论有（　　）

①$b>0$；

②若 $m=-\frac{4}{3}$ 时，则 $6a+5c=0$；

③若点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 在抛物线上 $x_1<x_2$，且 $x_1+x_2<-1$，则 $y_1>y_2$；

④$a\geqslant 1$ 时，关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1$ 必有两个不相等的实数根．

A．①②③　B．①③　C．①③④　D．①④

【解答】解：∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数）开口向上，过 $A(1,0)$，$B(m,0)$ 两点，且 $-2<m<-1$，

$\therefore a>0$，对称轴为直线 $x=\frac{1+m}{2}<0$，

$\therefore -\frac{b}{2a}<0$，

$\therefore b>0$，

故①正确；

当 $m=-\frac{4}{3}$ 时，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-\frac{4}{3}+1}{2}=-\frac{1}{6}$，

$\therefore b=\frac{1}{3}a$，

当 $x=1$ 时，$a+b+c=0$，

$\therefore \frac{4}{3}a+c=0$，

$\therefore 4a+3c=0$，故②错误；

由题意，抛物线的对称轴直线 $x=h$，$-0.5<h<0$，

∵点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 在抛物线上，$x_1<x_2$，且 $x_1+x_2<-1$，

$\therefore$ 点 M 到对称轴的距离 > 点 N 到对称轴的距离，

$\therefore y_1>y_2$，故③正确；

设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)(x-m)$，

方程 $a(x-1)(x-m)=-1$，

整理得，$ax^2-a(1+m)x+am+1=0$，

$\triangle=[-a(1+m)]^2-4a(am+1)$

$=a^2(m-1)^2-4a$，

$=a[a(m-1)^2-4]$，

∵$-2<m<-1$，$a\geqslant 1$，

$\therefore a(m-1)^2>4$，

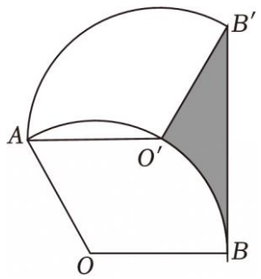
$\therefore a(m-1)^2-4>0$，

$\therefore \triangle>0$，

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1$ 必有两个不相等的实数根．故④正确，

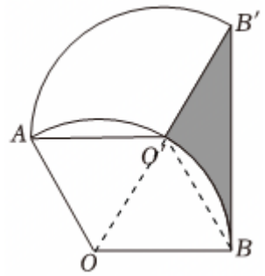
故选：C．

2．如图，将半径为 1，圆心角为120° 的扇形 AOB 绕点 A 逆时针旋转 60°，点 O，B 的对应点分别为 O'，B'，连接 BB'，则阴影部分的面积为（　　）



A．$\frac{\pi}{6}$　B．$\frac{\pi}{3}$　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$　D．$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

【解答】解：如图，连接 OO'，$O'B$，



∵将半径为 1，圆心角为120° 的扇形 OAB 绕点 A 逆时针旋转 60°，

$\therefore \angle OAO'=60°$，$OA=O'A$，$\angle AOB=\angle AO'B'=120°$，

$\therefore \triangle AOO'$ 是等边三角形（有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形），

$\therefore \angle AOO'=60°=\angle AO'O$，

$\therefore \angle O'OB=\angle AOB-\angle AOO'=60°$，$\angle AO'O+\angle AO'B'=180°$，

$\therefore O$，O'，B' 三点共线，

∵$\angle AOO'=60°$，$\angle AOB=120°$，$OO'=OB$，

$\therefore \triangle OBO'$ 是等边三角形，

∵$O'B=O'B'$，

$\therefore \angle O'B'B=\angle O'BB'$，

又 $\angle O'B'B+\angle O'BB'=\angle OO'B=60°$，

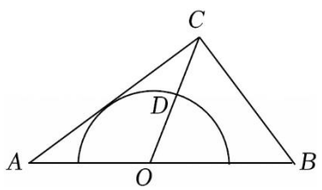
$\therefore \angle B'BO=90°$，

$\therefore BB'=\sqrt{3}OB=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}-\frac{60\pi\times 1^2}{360}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$．

故选：C．

3．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=10$，$AC=8$，$BC=6$，以边 AB 的中点 O 为圆心，作半圆与 AC 相切，连接 OC 与半圆相交于点 D，则 CD 的长为（　　）



A．2　B．3　C．1　D．2.5

【解答】解：如图，设 $\odot O$ 与 AC 相切于点 E，连接 OE，则 $OE\perp AC$，

$\because AB=10$，$AC=8$，$BC=6$，

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$，

$\therefore \angle ACB=90°$，

$\therefore BC\perp AC$，

$\therefore OE//BC$，

$\because AO=OB$，

$\therefore AE=EC=\frac{1}{2}AC=4$，

$\because OA=\frac{1}{2}AB=5$，

$\therefore OE=\frac{1}{2}BC=3$，

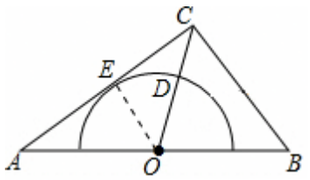
$\therefore OD=3$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，OC 是斜边 AB 上的中线，

$\therefore OC=\frac{1}{2}AB=5$，

$\therefore CD=OC-OD=5-3=2$．

故选：A．



4．若关于 x 的方程 $\frac{2x}{x-2}+\frac{m}{2-x}=1$ 的解为正数，则 m 的值可以为（　　）

A．1　B．2　C．3　D．4

【解答】解：去分母得：

$2x-m=x-2$，

移项，合并同类项得：

$x=m-2$．

$\because$ 关于 x 的方程 $\frac{2x}{x-2}+\frac{m}{2-x}=1$ 的解为正数，

$\therefore m-2>0$，

$\therefore m>2$．

$\because$ 关于 x 的方程 $\frac{2x}{x-2}+\frac{m}{2-x}=1$ 可能产生增根 2，

$\therefore m-2\neq 2$．

$\therefore m\neq 4$．

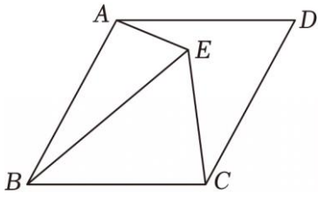
$\therefore m$ 的取值范围为：$m>2$ 且 $m\neq 4$．

$\therefore m$ 的值可以为 3．

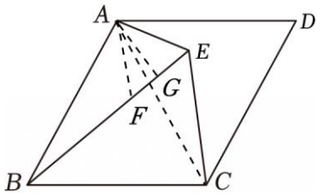
故选：C．

二．填空题（共 3 小题）

5．如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=5$，$\angle ABC=60°$，点 E 是菱形内部一点，连接 AE，BE，CE，若 $\angle AEB=60°$，$AE=2$，则 CE 的长为 $\sqrt{22}-1$ ．



【解答】解：如下图，连接 AC，在 EB 上截取 $EF=EA=2$，连接 AF，



$\because AB=BC$，$\angle ABC=60°$，

$\therefore AB=AC$，$\angle BAC=60°$，

$\because EF=EA$，$\angle AEB=60°$，

$\therefore\triangle AEF$ 为等边三角形，

$\therefore AE=AF$，$\angle EAF=60°$，

$\therefore \angle BAF+\angle FAC=\angle FAC+\angle CAE$，即 $\angle BAF=\angle CAE$，

$\therefore\triangle BAF\cong\triangle CAE(SAS)$，

$\therefore BF=CE$，

如图，过点 A 作 $AG\perp BE$ 于点 G，则 $EG=FG=1$，

$\therefore AG=\sqrt{AE^2-EG^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

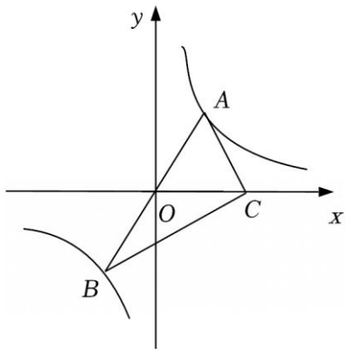
在 $Rt\triangle ABG$ 中，$BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{22}$，

$\therefore BF=BG-FG=\sqrt{22}-1$，

$\therefore CE=\sqrt{22}-1$．

故答案为：$\sqrt{22}-1$．

6．如图，过原点的直线 AB 交双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 于 A、B 两点，点 C 在 x 轴上，且 $AC=\frac{1}{2}AB$，若△ ABC 的面积为 6，则 k 的值为 __3__ ．



【解答】解：作 $AD\perp OC$ 于 D，

$\because$ 过原点的直线 AB 交双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 于 A、B 两点，

$\therefore$ 点 A 与点 B 关于原点对称，$OA=OB$，

$\because\triangle ABC$ 的面积为 6，

$\therefore S_{\triangle AOC}=3$，

$\because AC=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore AC=OA$，

$\therefore OD=CD$，

$\therefore S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOC}=\frac{3}{2}$，

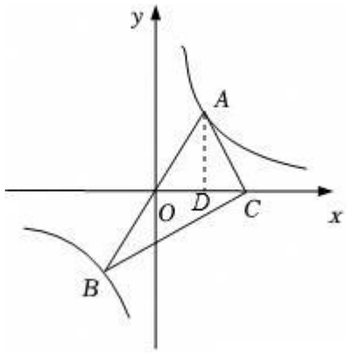
$\because S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}|k|$，

$\therefore|k|=3$，

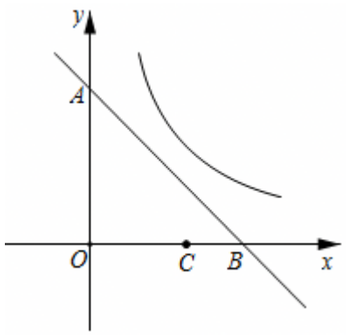
$\because k>0$，

$\therefore k=3$，

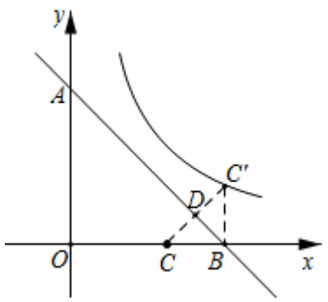
故答案为：3．



7．如图，直线 $y=-x+b$ 分别与 y 轴、x 轴交于点 A、点 B，点 C 坐标为 $(1,0)$，点 C 关于直线 AB 的对称点恰好在反比例函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 图象上，则 $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ．



【解答】解：作 C 关于直线 AB 的对称点 C'，连接 BC'，如图：



在 $y=-x+b$ 中，令 $x=0$ 得 $y=b$，令 $y=0$ 得 $x=b$，

$\therefore A(0,b)$，$B(b,0)$，

$\therefore OA=OB$，

$\therefore \angle ABO=45°$，

$\because C$ 关于直线 AB 的对称点是 C'，

$\therefore \angle CDB=90°$，

$\therefore \angle BCC'=\angle BC'C=45°$，

$\therefore \angle C'BC=90°$，$BC=BC'$，

$\because$ 点 C 坐标为 $(1,0)$，

$\therefore BC=BC'=b-1$，

$\therefore C'(b,b-1)$，

$\because C'$ 在 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，

$\therefore b(b-1)=1$，

解得 $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去），

故答案为：$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．

三．解答题（共 13 小题）

8．在平面直角坐标系中，若点 P 的横坐标和纵坐标相同，则称点 P 为“幸运点”，如点 $(-1,-1)$，$(5,5)$ 都是“幸运点”．

（1）小清认为所有的“幸运点”都在同一条直线 L 上，请直接写出直线 L 的解析式：$y=x$ ；

（2）小芳在研究抛物线 $C_1:y=ax^2-bx+4(a\neq 0)$ 时，发现它的图象上有且只有一个“幸运点” $(2,2)$．请你帮她求出 a，b 的值．

（3）在（2）的条件下将抛物线 C_1 向下平移 1 个单位得到抛物线 C_2，若 C_2 上有两个“幸运点”分别是 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$（其中 $x_1<x_2$）．当 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 时，求出 C_2 中 y 的最大值与最小值的差．

【解答】解：（1）令直线 L 的函数表达式为 $y=kx+b$，由条件可得：

$\begin{cases}-1=-k+b\\5=5k+b\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=1\\b=0\end{cases}$，

故直线 L 的函数表达式为 $y=x$，

故答案为：$y=x$．

（2）由条件可得 $2=4a-2b+4$，

又$\because$ 抛物线 $C_1:y=ax^2-bx+4(a\neq 0)$ 与直线 $L:y=x$ 仅有一个交点，

故方程 $ax^2-bx+4=x$ 只有一个实数解，

方程变形为 $ax^2-(b+1)x+4=0$，

即 $\triangle=[-(b+1)]^2-16a=0$，

可得方程组 $\begin{cases}2=4a-2b+4\\[-(b+1)]^2-16a=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$，

故 $a=1$、$b=3$．

（3）抛物线 C_2 的表达式为 $y=x^2-3x+3$，

结合抛物线 $C_2:y=x^2-3x+3$ 与直线 $L:y=x$，

得方程 $x^2-3x+3=x$，

解得 $x=1$ 或 $x=3$，

故 $1\leqslant x\leqslant 3$，C_2 的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$，

故当 $x=\frac{3}{2}$，对应函数值最小，此时 $y=(\frac{3}{2})^2-3\times\frac{3}{2}+3=\frac{3}{4}$，

当 $x=3$ 时，对应函数值最大，此时 $y=3^2-3\times 3+3=3$，

$3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$，

故 y 的最大值与最小值的差为 $\frac{9}{4}$．

9．在平面直角坐标系中，若点 P 的横坐标和纵坐标互为相反数，则称点 P 为“相反点”，如点 $(1,-1)$，$(-5,5)$ 都是“相反点”．

（1）小清认为所有的“相反点”都在同一条直线 L 上，请直接写出直线 L 的解析式：__ $y=-x$ __ ；

（2）小芳在研究抛物线 $C_1:y=ax^2+bx-4(a\neq 0)$ 时，发现它的图象上有且只有一个“相反点” $(2,-2)$．请你帮她求出 a，b 的值；

（3）在（2）的条件下将抛物线 C_1 向上平移 1 个单位得到抛物线 C_2，若 C_2 上有两个“相反点”分别是 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$（其中 $x_1<x_2$）．当 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 时，直接写出 C_2 中 y 的最大值与最小值的差．

【解答】解：（1）由题意得：$x+y=0$，即$y=-x$，

故答案为：$y=-x$；

（2）将点$(2,-2)$代入函数表达式得：$-2=4a+2b-4$，则$b=1-2a$，

联立二次函数和$y=-x$的表达式得：$ax^2+bx-4+x=0$，

则$\triangle=b^2-4ac=(2-2a)^2+16a=(2+2a)^2=0$，则$a=-1$，$b=3$；

（3）由（2）知，抛物线的表达式为：$y=-x^2+3x-4$，

则平移后的表达式为：$y=-x^2+3x-3$，

联立上式和$y=-x$得：$-x=-x^2+3x-3$，则$x=1$或3，

即点M、N的坐标分别为：$(1,-1)$、$(3,-3)$，

则$x_1\leqslant x\leqslant x_2$即为$1\leqslant x\leqslant 3$，

$\because y=-x^2+3x-3$的顶点坐标为：$(1.5,-\frac{3}{4})$，此时函数取得最大值，

当$x=3$时，$y_{min}=-x^2+3x-3=-3$，

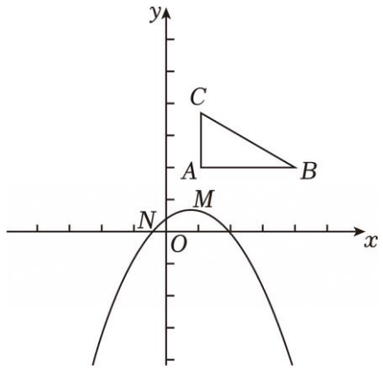
则y的最大值与最小值的差为$-\frac{3}{4}+3=\frac{9}{4}$.

10．如图，$\mathrm{Rt}\Delta ABC$中，$\angle BAC=90°$，$A(1,2)$，点$B(4,2)\angle ABC=30°$，抛物线$L:y=-\frac{1}{2}(x-t)^2+t(t>0)$的顶点为$M$，与$y$轴交点为$N$.

（1）抛物线有可能经过点A吗？请说明理由；

（2）设点N的纵坐标为y_N，直接写出y_N与t的函数关系式，并求y_N的最大值；

（3）在L的位置随t的值变化而变化的过程中，直接写出点M在ΔABC内部所经过路线的长.



【解答】解：（1）抛物线不可能经过点A，理由：

将点A的坐标代入抛物线的表达式并整理得：$t^2-4t+5=0$，

$\because\triangle=16-20<0$，

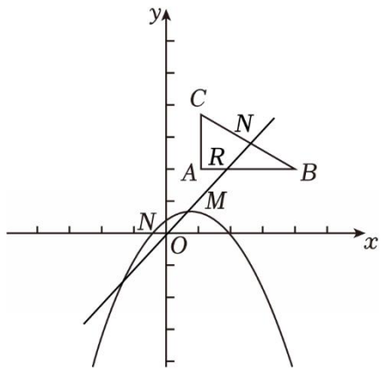
$\therefore$此方程无解，

故抛物线不可能经过点A；

（2）当$x=0$时，$y_N=-\frac{1}{2}(x-t)^2+t=y=-\frac{1}{2}(0-t)^2+t=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，

即$y_N=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}$，且$y_N$的最大值为$\frac{1}{2}$；

（3）由$y=-\frac{1}{2}(x-t)2+t$，知顶点$M(t,t)$，则在L的位置随t的值变化而变化的过程中，点M都在直线$y=x$上移动，设直线$y=x$分别交AB于点R，交BC于点N，则点$R(2,2)$，



由点$B(4,2)$、$\angle ABC=30°$知，直线BC的表达式为：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+2$，

联立直线BC的表达式和$y=x$得：$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+2$，

解得：$x=\frac{5\sqrt{3}-5}{3}$，

则$N(\frac{5\sqrt{3}-5}{3},\frac{5\sqrt{3}-5}{3})$，

由点R、N的坐标得$RN=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，

$\therefore$点M在ΔABC内部所经过路线的长为$\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

11．已知二次函数$y=ax^2+bx+1$.

（1）若该二次函数的图象经过点$(3,4)$，且关于直线$x=1$对称，求二次函数的解析式；

（2）当$a=\frac{2}{3}$时，该二次函数的图象与x轴分别交于A，B两点，与y轴交于点C，且$\triangle ABC$是等腰三角形，求$\triangle ABC$的面积；

（3）当$b=1$时，点$D(1,y_1)$，$E(2,y_2)$在该二次函数的图象上，若$y_1>y_2$，求二次函数在$0\leqslant x\leqslant 1$上的最大值m的取值范围.

【解答】解：（1）$\because$该二次函数$y=ax^2+bx+1$的对称轴为直线$x=1$，

$\therefore x=-\frac{b}{2a}=1$，即$b=-2a$，

$\because$该二次函数的图象经过点$(3,4)$，

$\therefore 9a+3b+1=4$，

把$b=-2a$代入得：$9a+3\times(-2a)+1=4$，

解得：$a=1$，

$\therefore b=-2$，

$\therefore$该二次函数的解析式为$y=x^2-2x+1$；

（2）当$a=\frac{2}{3}$时，则有$y=\frac{2}{3}x^2+bx+1$，

令$x=0$，则有$y=1$，即$C(0,1)$，

$\therefore OC=1$，

设该二次函数的图象与x轴的交点坐标分别为$A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，

不妨设$x_1<x_2$，

当$y=0$时，则有$\frac{2}{3}x^2+bx+1=0$，

那么x_1，x_2是该方程的两个不等实数根，

∴根据根与系数的关系可得：$x_1x_2=\frac{3}{2}$，

∴根据两点间距离公式可得：$AC^2=(x_1-0)^2+(0-1)^2=x_1^2+1$，

$AB^2=(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=x_1^2-2\times\frac{3}{2}+x_2^2=x_1^2-3+x_2^2$

$BC^2=(x_2-0)^2+(0-1)^2=x_2^2+1$，

当该二次函数的图象与 x 轴分别交于 A，B 两点，且在 y 轴的右侧，

∵△ ABC 是等腰三角形，

∴$AC=AB$，

∴$x_1^2+1=x_1^2-3+x_2^2$，

解得：$x_2=2$（负根舍去），

∴把 $x_2=2$ 代入 $\frac{2}{3}x^2+bx+1=0$ 得：$\frac{2}{3}\times4+2b+1=0$，

解得：$b=-\frac{11}{6}$，

∴$\frac{2}{3}x^2-\frac{11}{6}x+1=0$，

解得：$x_1=\frac{3}{4}$，$x_2=2$，

∴$AB=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$，

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{5}{8}$，

当该二次函数的图象与 x 轴分别交于 A，B 两点，且在 y 轴的左侧，

∵△ ABC 是等腰三角形，

∴$BC=AB$，

同理可得：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{5}{8}$；

综上所述：△ ABC 的面积为 $\frac{5}{8}$.

（3）当 $b=1$ 时，则有 $y=ax^2+x+1$，

∵点 $D(1,\ y_1)E(2,\ y_2)$ 在该二次函数的图象上，

∴$y_1=a+2$，$y_2=4a+3$，

∵$y_1>y_2$，

∴$a+2>4a+3$，

解得：$a<-\frac{1}{3}$，

∴该二次函数的图象开口向下，对称轴为直线 $x=-\frac{1}{2a}$，

∵$a<-\frac{1}{3}$，

∴$-2a>\frac{2}{3}$，即 $0<-\frac{1}{2a}<\frac{3}{2}$，

∴当 $1\leq-\frac{1}{2a}<\frac{3}{2}$ 时，即 $-\frac{1}{2}\leq a<-\frac{1}{3}$，

此时二次函数在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上，y 随 x 的增大而增大，

∴二次函数在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上的最大值为 $m=a+2$，

∵$-\frac{1}{2}\leq a<-\frac{1}{3}$，

∴$\frac{3}{2}\leqslant m<\frac{5}{3}$，

当 $0<-\frac{1}{2a}<1$ 时，即 $a<-\frac{1}{2}$，

∴二次函数在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上的最大值为 $m=a(-\frac{1}{2a})^2+(-\frac{1}{2a})+1=\frac{1}{4a}-\frac{1}{2a}+1=1-\frac{1}{4a}$，

∵$a<-\frac{1}{2}$，

∴$-4a>2$，即 $0<-\frac{1}{4a}<\frac{1}{2}$，

∴$1<m<\frac{3}{2}$；

综上所述：最大值 m 的取值范围为 $1<m<\frac{5}{3}$.

12．仿青蛙机器人从水平地面起跳，并落在水平地面上，其运动路线的最高点距地面 $60cm$，起跳点与落地点的距离为 $160cm$．如图 1，将仿青蛙机器人的运动路线抽象为抛物线，其顶点为 N，对称轴为直线 l，仿青蛙机器人在水平地面上的起跳点为 O，落地点为 M．以 O 为原点，OM 所在直线为 x 轴，过点 O 与 OM 所在水平地面垂直的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系．

（1）请直接写出顶点 N 的坐标，并求该抛物线的函数表达式；

（2）已知仿青蛙机器人起跳后的运动路线形状保持不变，即抛物线的形状不变．若仿青蛙机器人从点 O 正上方的点 P 处起跳，落地点为 Q，点 P 的坐标为 $(0,75)$，点 Q 在 x 轴的正半轴上，如图 1．求起跳点 P 与落地点 Q 的水平距离 OQ 的长；

（3）实验表明：仿青蛙机器人在跃过障碍物时，与障碍物上表面的每个点在竖直方向上的距离不少于 $3cm$，才能安全通过．如图 2，水平地面上有一个障碍物，其纵切面为四边形 $ABCD$，其中 $\angle ABC=\angle BCD=90°$，$AB=57cm$，$BC=40cm$，$CD=48cm$．仿青蛙机器人从距离 AB 左侧 $80cm$ 处的地面起跳，发现不能安全通过该障碍物．若团队人员在起跳处放置一个平台，仿青蛙机器人从平台上起跳，则刚好安全通过该障碍物．求该平台的高度（平台的大小忽略不计，障碍物的纵切面与仿青蛙机器人的运动路线在同一竖直平面内）.

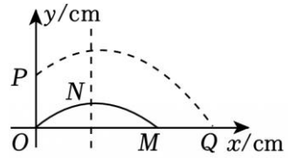


图1

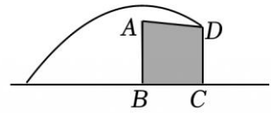


图2

【解答】解：（1）由题意得，抛物线的对称轴为直线 $x=80$，顶点纵坐标为 60，

∴顶点坐标为 $(80,60)$，

设抛物线的函数解析式为：$y=a(x-80)^2+60$，

∵图象过原点，

∴$a(0-80)^2+60=0$，

解得 $a=-\frac{3}{320}$，

∴$y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60$；

（2）∵抛物线的形状不变，点 $(0,75)$，

故第二次的函数图象可以看作由（1）的抛物线向上平移 75 个单位长度得到的，

∴新的抛物线的解析式为：

$y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60+75=-\frac{3}{320}(x-80)^2+135$，

当 $y=0$ 时，$-\frac{3}{320}(x-80)^2+135=0$，

解得：$x_1=200$，$x_2=-40$（舍去），

故起跳点 P 与落地点 Q 的水平距离 OQ 的长为 $200cm$；

（3）设该平台的高度为 kcm，由题意，

设新的函数解析式为：$y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60+k$，

$\because AB=57cm$，$BC=40cm$，$CD=48cm$，仿青蛙机器人从距离 AB 左侧 $80cm$ 处的地面起跳，

由题意，仿青蛙机器人经过 CD 正上方 $3cm$ 处，

即抛物线经过点 $(80+40,48+3)$，即：$(120,51)$，

$\therefore$ 把 $(120,51)$ 代入 $y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60+k$，

得：$51=-\frac{3}{320}(120-80)^2+60+k$，

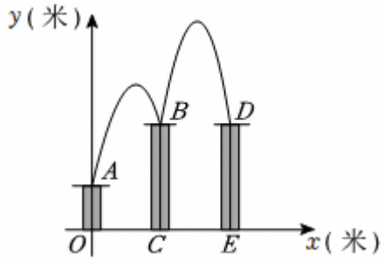
解得：$k=6$；

故该平台的高度为 $6cm$．

13．舞狮是中国优秀的传统民间艺术，每逢佳节或隆重庆典，民间常以舞狮来助兴．如图，舞狮团进行舞狮表演，演员从木桩顶部 A 处弹跳到另一木桩顶部 B 处，以 O 点为坐标原点，OC 所在的直线为 x 轴，OA 所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，其身体（看成一点）的路线是抛物线 $y=-3x^2+bx+c$ 的一部分，已知木桩顶部 A 处的高度 OA 为 1 米，另一木桩顶部 B 处的高度 BC 为 2.92 米，两个木桩的水平距离 OC 为 1.6 米．（不考虑木桩横截面积）

（1）求该抛物线的表达式；

（2）若在木桩 BC 右侧设置一个与 BC 高度相同的木桩 DE，演员从 B 处按如图所示方式跳出，跳跃轨迹形状不变（即抛物线形状不变，演员跳起的最高点距起跳点水平距离与从 A 点起跳时一致），要保证演员可落在新设置的木桩顶部 D 处，求新设置的木桩 DE 与 BC 间的水平距离．



【解答】解：（1）由题可知，$A(0,1)$，$B(1.6,2.92)$，则：

$\begin{cases}c=1\\-3\times1.6^2+1.6b+c=2.92\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}b=6\\c=1\end{cases}$，

$\therefore$ 该抛物线的表达式为 $y=-3x^2+6x+1=-3(x-1)^2+4$；

（2）根据题意，演员从 B 处跳到新设置的木桩顶部 D 处的轨迹是将（1）中抛物线先向右平移 1.6 个单位长度，再向上平移 $2.92-1=1.92$（个）单位长度后的抛物线，

$\therefore y=-3(x-1-1.6)^2+4+1.92=-3(x-2.6)^2+5.92$，

令 $2.92=-3(x-2.6)^2+5.92$，

解得 $x_1=1.6$（舍去），$x_2=3.6$，

则 $3.6-1.6=2$（米），

$\therefore$ 新设置的木桩 DE 与 BC 间的水平距离为 2 米．

14．在 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle ADE$ 中，$\angle ABC=\angle ADE=90°$，$AB=AD=6$，$BC=DE=8$，将 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle ADE$ 的点 A 重合放置，如图 1，连接 CE，BD．

（1）若将图 1 中的 $Rt\triangle ADE$ 绕点 A 按逆时针方向旋转一定的角度，其他条件不变，则 $\frac{BD}{CE}$ 的值为 $\frac{3}{5}$；

（2）如图 2，将 $Rt\triangle ADE$ 绕点 A 按逆时针方向旋转，当点 D 恰好落在 $Rt\triangle ABC$ 的中线 BM 的延长线上时，连接 CE 交 BM 的延长线于点 N，连接 AN，试判断四边形 $ABCN$ 的形状，并说明理由；

（3）在 $Rt\triangle ADE$ 绕点 A 旋转的过程中，试探究以 C，D，E 三点为顶点的三角形能否成为直角三角形．若能，请直接写出 $Rt\triangle CDE$ 的面积；若不能，请说明理由．

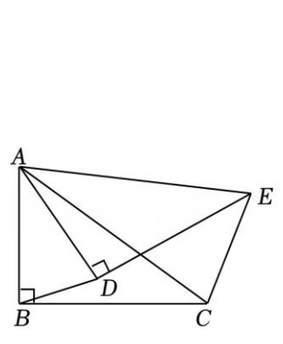


图1

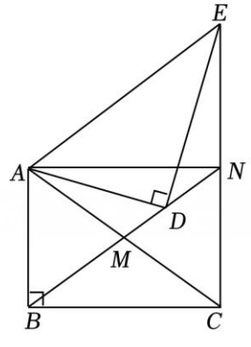
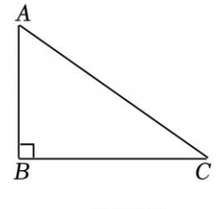


图2



备用图

【解答】解：（1）$\because\angle ABC=\angle ADE=90°$，$AB=AD=6$，$BC=DE=8$，

$\therefore\triangle ADE\cong\triangle ABC(SAS)$，

$\therefore AC=AE=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{AD^2+DE^2}=10$，$\angle DAE=\angle BAC$，

$\therefore\angle DAE-\angle DAC=\angle BAC-\angle DAC$，

即 $\angle CAE=\angle BAD$，

$\because\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=1$，

$\therefore\triangle CAE\backsim\triangle BAD$，

$\therefore\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$，

故答案为：$\frac{3}{5}$．

（2）四边形 $ABCN$ 是矩形，理由如下：

由旋转得 $\angle BAD=\angle CAE$，

$\because\angle ABC=\angle ADE=90°$，$AB=AD=6$，$BC=DE=8$，

$\therefore\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$，

$\therefore\triangle ABD\backsim\triangle ACE$，

$\therefore\angle ABD=\angle ACE$，

$\because Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，BM 是中线，

$\therefore BM=AM=CM=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore\angle ABM=\angle BAM$，

$\therefore \angle BAM = \angle ACE$，

又$\because AM = CM$，$\angle AMB = \angle CMN$，

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CNM(ASA)$，

$\therefore BM = NM$，

又$\because AM = CM$，

$\therefore$四边形$ABCN$是平行四边形，

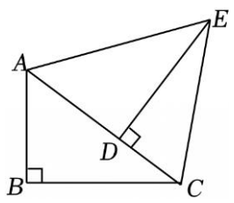
$\because \angle ABC = 90°$，

$\therefore$平行四边形$ABCN$是矩形．

（3）直角三角形的面积为16或64或48或$\frac{192}{13}$．

分4种情况讨论：

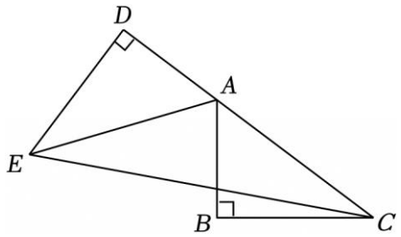
①如图，当AD与AC重合时，此时$DE \perp AC$，此时$\triangle CDE$是直角三角形，



$\because AB = AD = 6$，$BC = DE = 8$，$AC = AE = 10$，

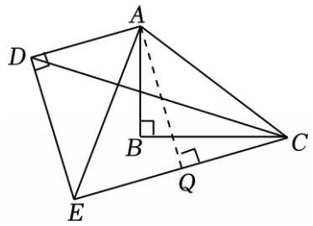
$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot DE = \frac{1}{2}(AC - AD) \times DE = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$；

②如图，当AD在CA延长线上时，此时$DE \perp AC$，此时$\triangle CDE$是直角三角形，



$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot DE = \frac{1}{2}(AC + AD) \times DE = \frac{1}{2} \times 16 \times 8 = 64$；

③如图，当$DE \perp AC$时，此时$\triangle CDE$是直角三角形，过点A作$AQ \perp EC$于点Q，



$\because AC = AE = 10$，

$\therefore EQ = QC = \frac{1}{2}EC$，

$\therefore AQ \perp EC$，$DE \perp EC$，$DE \perp AD$，

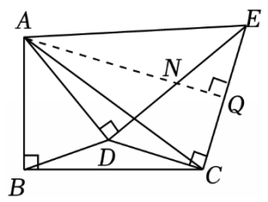
$\therefore$四边形$ADEQ$是矩形，

$\therefore AD = EQ = QC = \frac{1}{2}EC = 6$，

$\therefore EC = 12$，

$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}EC \cdot DE = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$；

④如图，当$DE \perp EC$时，此时$\triangle CDE$是直角三角形，过点A作$AQ \perp EC$于点Q，交DE于点N，



$\therefore$设$EQ = QC = \frac{1}{2}EC = x, NQ // CD$，

$\therefore \frac{EN}{DN} = \frac{EQ}{QC} = 1$，

$\therefore DN = EN = \frac{1}{2}DE = 4$，$QN = \frac{1}{2}DC$，

$\because \angle AND = \angle ENQ$，$\angle ADN = \angle EQN = 90°$，

$\therefore \angle DAN = \angle QEN$，

$\therefore \tan\angle DAN = \tan\angle QEN$，

$\therefore \frac{QN}{EQ} = \frac{DN}{AD} = \frac{2}{3}QN = \frac{2}{3}x$，

$\therefore DC = \frac{4}{3}x$，$CE = 2x$，

$\because ED^2 = DC^2 + EC^2$，

$\therefore 8^2 = (2x)^2 + (\frac{4x}{3})^2$，

$\therefore x^2 = \frac{144}{13}$，

故$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}EC - DC = \frac{1}{2} \times 2x \times \frac{4}{3}x = \frac{4}{3}x^2 = \frac{4}{3} \times \frac{144}{13} = \frac{192}{13}$，

综上，直角三角形的面积为16或64或48或$\frac{192}{13}$．

15．某数学兴趣小组在学习了《分式》知识后，探究了分式的一种特殊变形：例如：$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$．我们把这种将分式的分母不变，分子中构造含分母的结构，从而将原分式分离出一个常数和一个分子为常数的分式结构的变形方法叫做“分离常数法”．“分离常数法”是分式研究的重要数学思想方法．

（1）请利用“分离常数法”将分式$\frac{3x-1}{x+1}$变形为$m + \frac{n}{x+1}$（其中m，n为常数），求m，n的值；

（2）若分式$\frac{4x-3}{x-1}$的值为整数，求满足条件的整数x的值；

（3）利用分离常数法，求分式$\frac{-2x^2+3}{x^2+1}$的最大值．

【解答】解：（1）$\frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(x+1)-4}{x+1} = 3 - \frac{4}{x+1}$，

$\therefore m = 3$，$n = -4$；

（2）$\frac{4x-3}{x-1} = \frac{4(x-1)+1}{x-1} = 4 + \frac{1}{x-1}$，

$\because$分式$\frac{4x-3}{x-1}$的值为整数，且x为整数，

$\therefore x - 1 = \pm 1$，

$\therefore x = 0$或2；

（3）$\frac{-2x^2+3}{x^2+1} = \frac{-2(x^2+1)+5}{x^2+1} = -2 + \frac{5}{x^2+1}$，

$\because x^2 + 1 \geqslant 1$，

$\therefore 0 < \frac{5}{x^2+1} \leq 5$，

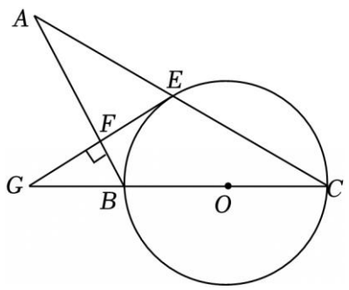
$\therefore -2 < \frac{-2x^2+3}{x^2+1} \leq 3$，

$\therefore$当$x = 0$时，分式$\frac{-2x^2+3}{x^2+1}$的最大值为3．

16. 如图，在△ ABC 中，$AB=BC$，以 BC 为直径作⊙O，交 AC 于点 E，过点 E 作 $EG\perp AB$ 于点 F，交 CB 的延长线于点 G．

（1）求证：EG 是⊙O 的切线；

（2）若 $GF=2\sqrt{3}$，$GB=4$，求 EC 的长．



【解答】（1）证明：连接 OE，则 $OE=OC$，

$\therefore\angle OEC=\angle C$，

$\because AB=BC$，

$\therefore\angle A=\angle C$，

$\therefore\angle OEC=\angle A$，

$\therefore OE//AB$，

$\because EG\perp AB$ 于点 F，

$\therefore\angle OEG=\angle BFG=90°$，

$\because OE$ 是⊙O 的半径，且 $EG\perp OE$，

$\therefore EG$ 是⊙O 的切线．

（2）解：$\because\angle OEG=\angle BFG=90°$，$GF=2\sqrt{3}$，$GB=4$，

$\therefore\cos G=\dfrac{GF}{GB}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\angle G=30°$，

$\therefore\angle GOE=90°-\angle G=60°$，

$\therefore\angle C=\dfrac{1}{2}\angle GOE=30°$，

$\therefore\angle G=\angle C$，

$\because OE=OB=\dfrac{1}{2}OG$，

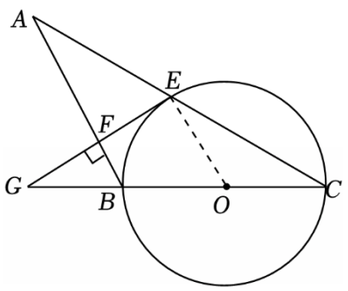
$\therefore OE=OB=GB=4$，

$\therefore OG=2GB=8$，

$\therefore EG=\sqrt{OG^2-OE^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，

$\therefore EC=EG=4\sqrt{3}$，

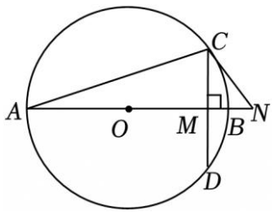
$\therefore EC$ 的长为 $4\sqrt{3}$．



17. 如图，在⊙O 中，AB 是直径，CD 是弦，且 $AB\perp CD$，垂足为 M，$AB=10$，$CD=6$，在 AB 的延长线上取一点 N，连接 CN，使 $\angle DCN=2\angle A$．

（1）求证：CN 是⊙O 的切线；

（2）求 MN 的长．



【解答】（1）证明：连接 OC，则 $\angle BOC=2\angle A$，

$\because\angle DCN=2\angle A$，

$\therefore\angle DCN=\angle BOC$，

$\because AB\perp CD$ 于点 M，

$\therefore\angle OMC=90°$，

$\therefore\angle OCN=\angle DCN+\angle OCD=\angle BOC+\angle OCD=90°$，

$\because OC$ 是⊙O 的半径，且 $CN\perp OC$，

$\therefore CN$ 是⊙O 的切线．

（2）解：连接 BC，

$\because AB$ 是⊙O 的直径，CD 是弦，$AB\perp CD$ 于点 M，$AB=10$，$CD=6$，

$\therefore\angle CMB=\angle AMC=\angle ACB=90°$，$OC=OA=OB=\dfrac{1}{2}AB=5$，

$CM=DM=\dfrac{1}{2}CD=3$，$AM=10-BM$，

$\therefore\angle BCM=\angle CAM=90°-\angle ACM$，

$\because\dfrac{BM}{CM}=\tan BCM=\tan\angle CAM=\dfrac{CM}{AM}$，

$\therefore BM\cdot AM=CM^2=9$，

$\therefore BM(10-BM)=9$，

$\therefore$ 解得 $BM=1$ 或 $BM=9$（不符合题意，舍去），

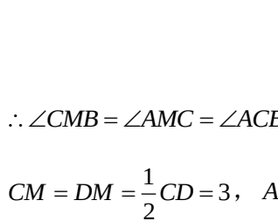
$\therefore OM=OB-BM=5-1=4$，

$\because\cos\angle CON=\dfrac{OC}{ON}=\dfrac{OM}{OC}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore ON=\dfrac{5}{4}OC=\dfrac{5}{4}\times5=\dfrac{25}{4}$，

$\therefore MN=ON-OM=\dfrac{25}{4}-4=\dfrac{9}{4}$，

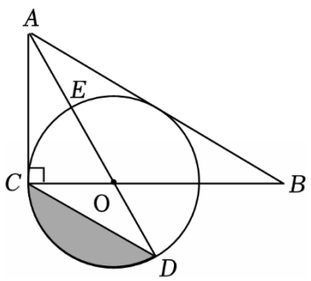
$\therefore MN$ 的长是 $\dfrac{9}{4}$．



18．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，AO 是△ ABC 的角平分线，以 O 为圆心，OC 为半径作⊙O 与直线 AO 交于点 E 和点 D．

（1）求证：AB 是⊙O 的切线；

（2）若 $\dfrac{AC}{AE}=\sqrt{3}$，⊙O 的半径为 6，求弦 CD 和 CD 围成的阴影弓形部分面积．



【解答】（1）证明：作 $OF\perp AB$ 于点 F，则 $\angle AFO=90°$，

$\because \angle ACB=90°$，点 O 在 BC 上，

$\therefore \angle AFO=\angle ACO=90°$，

$\because AO$ 是△ ABC 的角平分线，

$\therefore \angle OAF=\angle OAC$，

在△ OAF 和△ OAC 中，

$$\begin{cases}\angle OAF=\angle OAC\\ \angle AFO=\angle ACO\\ AO=AO\end{cases}$$

$\therefore$ △ $OAF\cong$ △ $OAC(AAS)$，

$\therefore OF=OC$，

$\therefore$ 点 F 在⊙O 上，

$\because OF$ 是⊙O 的半径，且 $AB\perp OF$，

$\therefore AB$ 是⊙O 的切线．

（2）解：连接 CE，

$\because DE$ 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle DCE=\angle ACB=90°$，

$\therefore \angle D+\angle OEC=90°$，$\angle ACE+\angle OCE=90°$，

$\because OE=OC$，

$\therefore \angle OEC=\angle OCE$，

$\therefore \angle D=\angle ACE$，

$\because \angle DAC=\angle CAE$，

$\therefore$ △ $DAC\backsim$ △ CAE，

$\therefore \tan\angle CED=\dfrac{DC}{CE}=\dfrac{AC}{AE}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle CED=60°$，

$\therefore \angle COD=2\angle CED=120°$，△ COE 是等边三角形，

$\because$⊙O 的半径为 6，

$\therefore CE=OE=6$，$DE=2OE=12$，

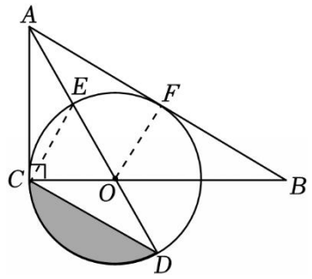
$\therefore CD=\sqrt{DE^2-CE^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle DCE}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle COD}=S_{\triangle COE}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle DCE}=9\sqrt{3}$，

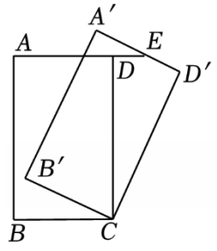
$\therefore S_{阴影}=S_{扇形COD}-S_{\triangle COD}=\dfrac{120\pi\times 6^2}{360}-9\sqrt{3}=12\pi-9\sqrt{3}$，

$\therefore$ 阴影部分的面积为 $12\pi-9\sqrt{3}$．

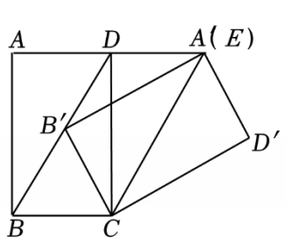


19.【综合与探究】

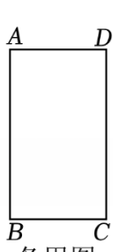
问题情境：将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转，当旋转到如图①所示的位置时，得到矩形 $A'B'CD'$，点 A，B，D 的对应点分别为点 A'，B'，D'，设直线 AD 与直线 $A'D'$ 交于点 E．



图①



图②



备用图

猜想证明：

（1）猜想 DE 与 $D'E$ 的数量关系，并证明；

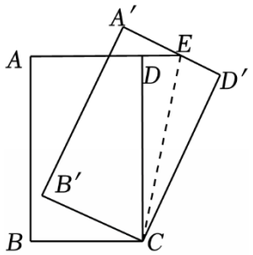
（2）如图②，在旋转的过程中，当点 B' 恰好落在矩形 $ABCD$ 的对角线 BD 上时，点 A' 恰好落在 AD 的延长线上（即点 A' 与点 E 重合），连接 $A'C$，求证：四边形 $A'DBC$ 是平行四边形；

问题解决：

（3）在矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转的过程中，若 $AB=5$，$BC=3$，当 A'，B'，D 三点在同一条直线上时，请直接写出 $A'D$ 的值．

【解答】（1）解：$DE=D'E$，理由如下：

如图①，连接 CE，



图①

由题知四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'CD'$ 都是矩形，

$\therefore \angle ADC=\angle CD'E=90°$，

$\therefore \angle CDE=180°-\angle ADC=90°$，

即 $\angle CDE=\angle CD'E$，

$\because$将矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转，当旋转到如图①所示的位置时，得到矩形 $A'B'CD'$，

$\therefore CD=CD'$，

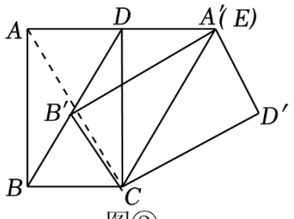
在 Rt △ CDE 和 Rt △ $CD'E$ 中，

$$\begin{cases}CD=CD'\\ CE=CE\end{cases}$$，

$\therefore Rt$ △ $CDE\cong Rt$ △ $CD'E(HL)$，

$\therefore DE=D'E$；

（2）证明：如图 2：连接 AC，



图②

根据旋转的性质可得：$AC=A'C$，

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD//BC$，$AD=BC$，$\angle ADC=90°$，

即 $CD\perp AA'$，

又$\because AC=A'C$，

$\therefore AD=A'D$，

$\therefore A'D=BC$，

$\because A'D//BC$，$A'D=BC$，

$\therefore$四边形$A'DBC$是平行四边形；

（3）解：当点A'、B'在CD的同一侧时，如图3，

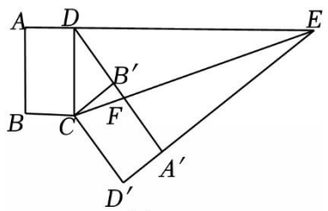


图3

根据旋转的性质可得：$BC=B'C=3$，$AB=A'B'=5$，

$\angle A'B'C=\angle ABC=90°$，

$\therefore \angle DB'C=90°$，

在$Rt\triangle CDB'$中，由勾股定理得：$B'D=\sqrt{CD^2-B'C^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\therefore A'D=A'B'+B'D=5+4=9$；

当点A'，B'在CD的异侧时，如图4，

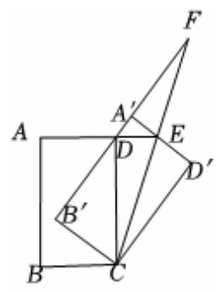


图4

根据旋转的性质可得：$BC=B'C=3$，$AB=A'B'=5$，

$\angle A'B'C=\angle ABC=90°$，

$\therefore \angle DB'C=90°$，

在$Rt\triangle CDB'$中，由勾股定理得：$B'D=\sqrt{CD^2-B'C^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\therefore A'D=A'B'-B'D=5-4=1$；

综上，$A'D$的值为1或9.

20．如图，线段AB可以记作a，类似地，以A为起点，以B为终点的有向线段记作$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$．在平面直角坐标系中，若$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$．如$A(2,1)$，$B(-3,2)$，则$\overrightarrow{AB}=(-3-2,2-1)=(-5,1)$．

在平面直角坐标系中，设$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，可以如下定义$\vec{a}$，$\vec{b}$的运算：

加法：$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

减法：$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$

数乘：$k\vec{a}=(kx_1,ky_1)$（k为实数）

点乘：$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$．

对于$\vec{a},\vec{b}$，若$\vec{a},\vec{b}$所在直线垂直，我们就说$\vec{a},\vec{b}$垂直，记为$\vec{a}\perp\vec{b}$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，若$\vec{a},\vec{b}$所在直线平行或共线，我们就说$\vec{a}$，$\vec{b}$平行，记为$\vec{a}//\vec{b}$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则存在实数k，使得$\vec{b}=k\vec{a}$．根据以上材料回答问题：

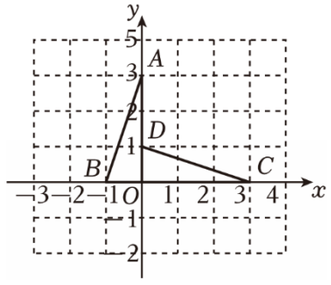
（1）若O为坐标原点，点A为$(6,2)$，则$\overrightarrow{OA}=$（__6__，____）．

（2）若$\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(-4,m)$其中m为实数，且满足$\vec{a}//\vec{b}$，则$m=$____．

（3）若$\vec{a}=(x-1,2)$，$\vec{b}=(x-2,-3)$其中x为实数，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$____（用含x的式子表示）．

（4）若$\vec{a}=(x,0)$，$\vec{b}=(1,0)$，$\vec{c}=(-1,2x)$，$\vec{d}=(0,1)$，其中x为实数，且满足$(\vec{a}+\vec{c})\perp(\vec{b}-\vec{d})$，则$x=$____．

（5）如图，在平面直角坐标系中，$A(0,3)$，$B(-1,0)$，$OB=OD$，$OA=OC$，请用上面材料中的知识，通过运算的方式说明线段AB、CD的位置关系．



【解答】解：（1）$\because O$为坐标原点，点A为$(6,2)$，

$\therefore \overrightarrow{OA}=(6-0,\ 2-0)=(6,\ 2)$．

故答案为：6；2.

（2）$\because \vec{a}//\vec{b}$，

$\therefore$存在实数k，使得$\vec{b}=k\vec{a}$，

即$(2k,\ 3k)=(-4,\ m)$，

$\therefore \begin{cases}2k=-4\\3k=m\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-2\\m=-6\end{cases}$．

故答案为：-6．

（3）$\because \vec{a}=(x-1,2)$，$\vec{b}=(x-2,-3)$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=(x-1)(x-2)+(-6)=x^2-3x+2-6=x^2-3x-4$．

故答案为：x^2-3x-4．

（4）$\because \vec{a}=(x,0)$，$\vec{b}=(1,0)$，$\vec{c}=(-1,2x)$，$\vec{d}=(0,1)$，

$\therefore \vec{a}+\vec{c}=(x-1,2x)$，$\vec{b}-\vec{d}=(1,-1)$，

$\because (\vec{a}+\vec{c})\perp(\vec{b}-\vec{d})$，

$\therefore (\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{d})=0$，

$\therefore x-1-2x=0$，

解得$x=-1$．

故答案为：-1．

（5）$\because A(0,3)$，$B(-1,0)$，$\therefore \overrightarrow{AB}=(-1,-3)$．

$\because OB=OD$，$OA=OC$，$\therefore C(3,0)$，$D(0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{CD}=(-3,1)$，

$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-1)\times(-3)+(-3)\times1=3-3=0$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$，$\therefore AB\perp CD$．