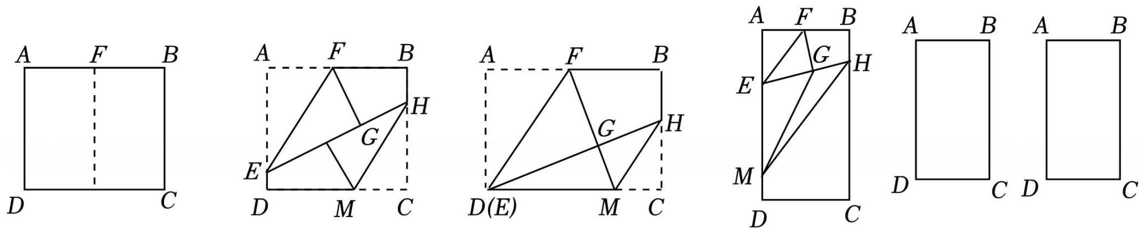
几何综合题选练（结合折叠 1-3 题　结合旋转 4-6 题　结合平移 7-9 题　建模举例 10-12 题）

一．结合折叠（第 1—3 题）

1．综合与实践课上，伍老师带领学生们分小组进行折叠矩形纸片的探究活动．



图(1)　图(2)　图(3)　图(4)　备用图1　备用图2

【折叠实践】

第一步：如图（1），将矩形纸片 $ABCD$ 对折，使边 AD，BC 重合，再展开，折痕与 AB 交于点 F．

第二步：如图（2），在 AD 上取一点 E，沿 EF 折叠矩形 $ABCD$，点 A 的对应点为 G．延长 EG 交 BC 于点 H，将纸片沿过点 H 的直线折叠．使点 C 的对应点落在 EH 上，折痕与 DC 交于点 M．

【初步发现】

（1）探究图（2）中 EF 和 MH 的位置关系．

【深入探究】

（2）勤学小组的同学们选用了如图（3）所示的矩形纸片，选取的点 E 与点 D 重合，按步骤折叠后发现，点 F，G，M 共线．请你帮他们求出$\dfrac{AB}{AD}$的值．

【拓展延伸】

（3）奋进小组的同学们选用了 $AB=4dm$，$BC=8dm$ 的矩形纸片，按步骤进行多次折叠（选取不同位置的点 E），且第二步折叠中，折痕与 AD 交于点 M，把纸片展开后，连接 GM（图（4）是奋进小组的一次折叠样例）．请你解决：当△EGM 为直角三角形时，直接写出 AE 的长．

2．【教材再现】

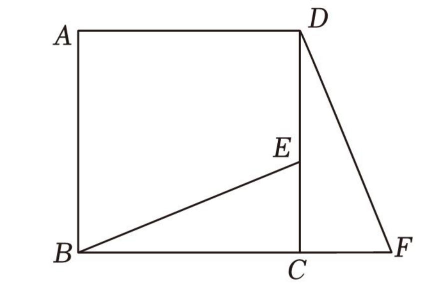
（1）如图①，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 边上一点，F 为 BC 延长线上一点，且 $CE=CF$．求证：$BE=DF$，$BE\perp DF$；

【纵向探变】

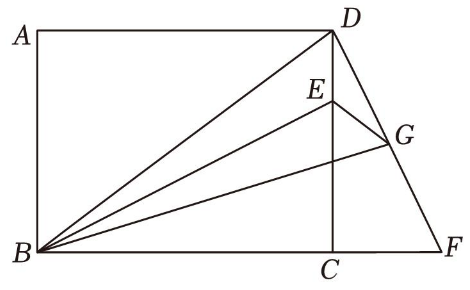
（2）如图②，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，E 是 CD 边上一点，将△BED 沿 BE 折叠得到△BEG，延长 DG 和 BC 相交于点 F．若 $CE=2DE$，求 FG 的长；

【横向拓展】

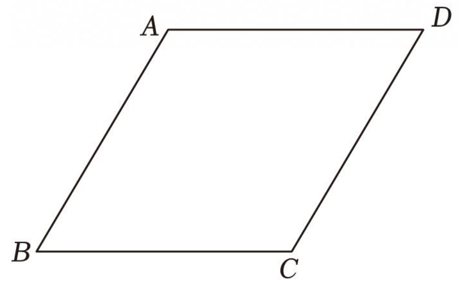
（3）保持（2）中 AB，AD 的大小不变，扭动矩形，使得$\angle A=120°$，如图③所示．E 是 CD 边上一点且满足 $CE=2DE$，点 F 是 BC 延长线上一点，连接 DF 交射线 BE 于点 G，当线段 DF 与射线 BE 所夹的锐角为 60° 时，直接写出 $DG\cdot DF$ 的值．



①



②



③

3．【问题初探】

（1）如图 1，在▱$ABCD$ 中，$BE\perp AD$，垂足为 E，点 F 为边 CD 的中点，连接 EF，BF．

求证：$BF=EF$．

甲同学的证明思路是：延长 BF，AD 交于点 P（如图 2），利用全等和直角三角形斜边中线的性质可证出 $BF=EF$．

乙同学的证明思路是：取 AB 的中点 N，连接 FN 交 BE 于点 M（如图 3），证出 FN 平分 BE，$FN\perp BE$，即可证出 $BF=EF$．

请选择一名同学的证明思路，写出证明过程．

【类比分析】

（2）如图 4，在▱$ABCD$ 中，点 F 为边 CD 的中点，连接 BF，将△CBF 沿 BF 折叠，点 C 落在▱$ABCD$ 内 C' 处，连接 DC' 并延长交 AB 于点 G．求证：$AG=BG$．

【拓展应用】

（3）如图 5，将▱$ABCD$ 沿过 B 点的直线折叠，点 A 的对应点为 A'，使 $BA'\perp CD$ 于点 H，折痕交边 AD 于点 M，MA' 交 CD 边于点 N，若▱$ABCD$ 的面积为 20，$AB=5$，$BC=2\sqrt{5}$，求四边形 $MBHN$ 的面积．

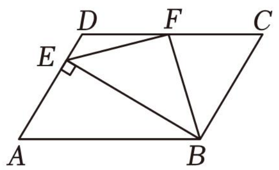


图1

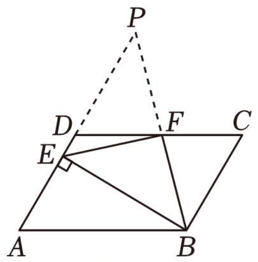


图2

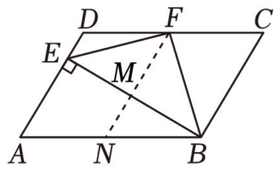


图3

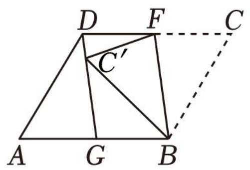


图4

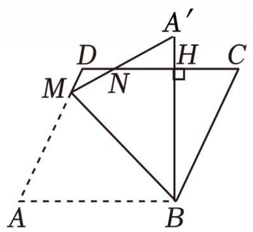


图5

二．结合旋转（第 4—6 题）

4．如图所示，在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，点 D 为射线 AC 上一动点，作$\angle BDE=\angle BAC$，过点 B 作 $BE\perp BD$，交 DE 于点 E，连接 CE．（点 A、E 在 BD 的两侧）

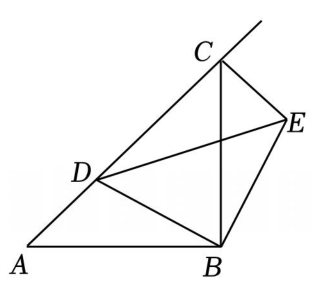


图1

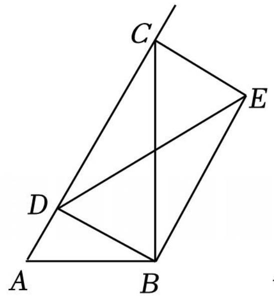
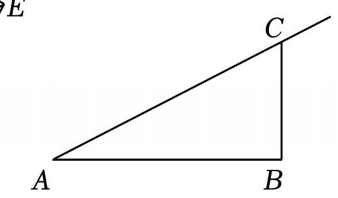


图2



备用图

【问题发现】

(1)如图 1 所示，若$\angle A=45°$ 时，AD、CE 的数量关系为 ____________ ，直线 AD、CE 的夹角为 ___________ ；

【类比探究】

（2）如图 2 所示，若$\angle A=60°$ 时，（1）中的结论是否成立，请说明理由；

【拓展延伸】

（3）若$\angle A=30°$，$AC=2\sqrt{3}$，且△ABD 是以 AB 为腰的等腰三角形时，请直接写出线段 CE 的长．

5．如图1，正方形$ABCD$的边AB与正方形$BEFG$的边BE重合，直线AG交直线EF于点H，连接EC．

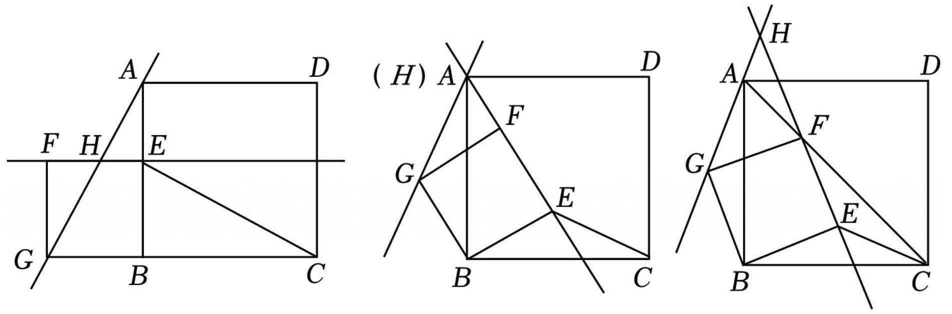


图1　　图2　　图3

（1）图1中线段AG与CE的数量关系是____________，$\angle AGF$与$\angle BEC$的关系是____________________；

（2）如图2，正方形$BEFG$绕点B顺时针旋转角度α（0°≤α≤90°），当点H与点A重合时，（1）中的结论依然成立的，请予以证明；不成立的，请写出它们新的关系，并说明理由；

（3）如图3，若$AB=10$，$BE=5$，连接AC，正方形$BEFG$绕点B顺时针旋转角度α（0°≤α≤90°），当点F落在对角线AC上时，请直接写出此时△AGF的面积．

6．已知在△ABC中，O为BC边的中点，连接AO，将△AOC绕点O顺时针方向旋转（旋转角为钝角），得到△EOF，连接AE，CF．

（1）如图1，当$\angle BAC=90°$且$AB=AC$时，则AE与CF满足的数量关系是____________；

（2）如图2，当$\angle BAC=90°$且$AB\neq AC$时，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请写出证明过程；若不成立，请说明理由．

（3）如图3，延长AO到点D，使$OD=OA$，连接DE，当$AO=CF=5$，$BC=6$时，求DE的长．

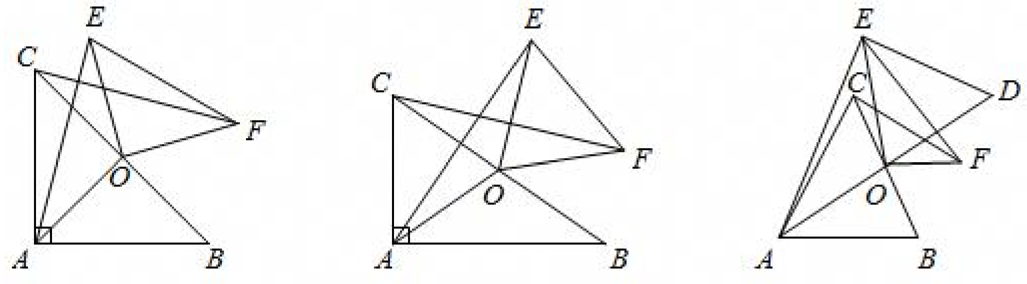


图1　　图2　　图3

三．结合平移（第7—9题）

7．【方法提炼】解答几何问题常常需要添辅助线，其中平移图形是重要的添辅助线策略．

【问题情境】

如图1，在正方形$ABCD$中，E，F，G分别是BC，AB，CD上的点，$FG\perp AE$于点Q．求证：$AE=FG$．

小明在分析解题思路时想到了两种平移法：

方法1：平移线段FG使点F与点B重合，构造全等三角形；

方法2：平移线段BC使点B与点F重合，构造全等三角形；

【尝试应用】

（1）请按照小明的思路，选择其中一种方法进行证明；

（2）如图2，正方形网格中，点A，B，C，D为格点，AB交CD于点O．求$\sin\angle AOC$的值；

（3）如图3，点P是线段AB上的动点，分别以AP，BP为边在AB的同侧作正方形$APCD$与正方形$PBEF$，连接DE分别交线段BC，PC于点M，N．

①求$\angle DMC$的度数；

②连接AC交DE于点H，直接写出$\dfrac{BC}{DH}$的值．

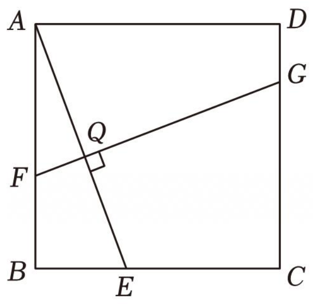


图1

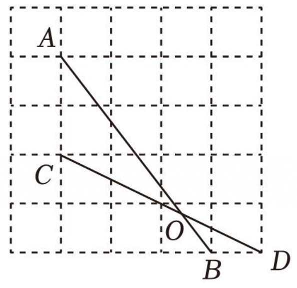


图2

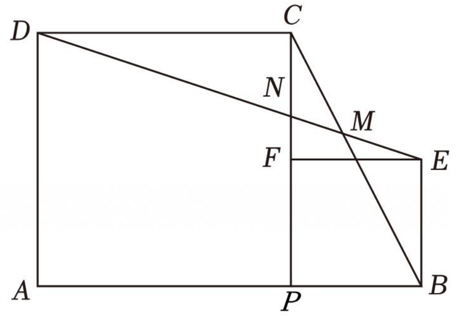


图3

8．如图1，四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$AD=3$，$AB=2\sqrt{3}$，$DH\perp BC$于点H．将$\triangle PQM$与该四边形按如图方式放在同一平面内，使点P与A重合，点B在PM上，其中$\angle Q=90^\circ$，$\angle QPM=30^\circ$，$PM=4\sqrt{3}$．

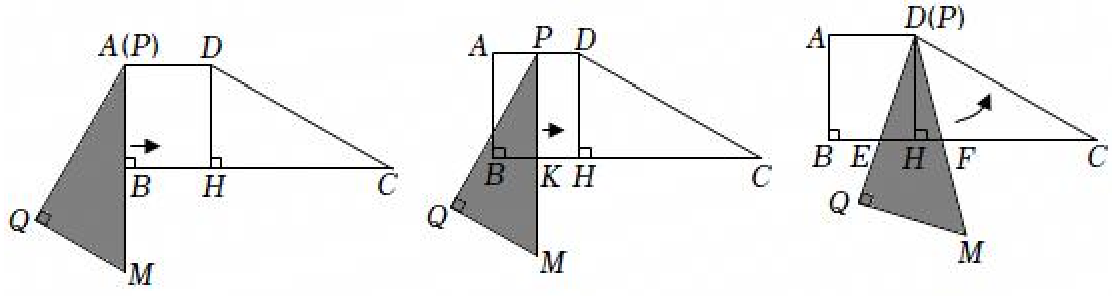


图1 图2 图3

（1）求证：$\triangle PQM\cong\triangle CHD$；

（2）$\triangle PQM$从图1的位置出发，先沿着BC方向向右平移（图2），当点P到达点D后立刻绕点D逆时针旋转（图3），当边PM旋转50°时停止．

①边PQ从平移开始，到绕点D旋转结束，求边PQ扫过的面积；

②如图2，点K在BH上，且$BK=9-4\sqrt{3}$．若$\triangle PQM$右移的速度为每秒1个单位长，绕点D旋转的速度为每秒5°，求点K在$\triangle PQM$区域（含边界）内的时长；

③如图3，在$\triangle PQM$旋转过程中，设PQ，PM分别交BC于点E，F，若$BE=d$，直接写出CF的长（用含d的式子表示）．

9．有两张完全重合的矩形纸片，将其中一张绕点 A 顺时针旋转 90° 后得到矩形 $AMEF$（如图 1），连接 BD，MF，若 $BD=16cm$，$\angle ADB=30°$．

（1）试探究线段 BD 与线段 MF 的数量关系和位置关系，并说明理由；

（2）把△BCD 与△MEF 剪去，将△ABD 绕点 A 顺时针旋转得△AB_1D_1，边 AD_1 交 FM 于点 K（如图 2），设旋转角为β（0°＜β＜90°），当△AFK 为等腰三角形时，求β的度数；

（3）若将△AFM 沿 AB 方向平移得到△$A_2F_2M_2$（如图 3），F_2M_2 与 AD 交于点 P，A_2M_2 与 BD 交于点 N，当 $NP\parallel AB$ 时，求平移的距离．

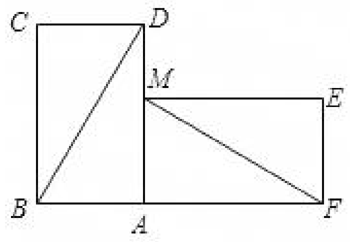


图 1

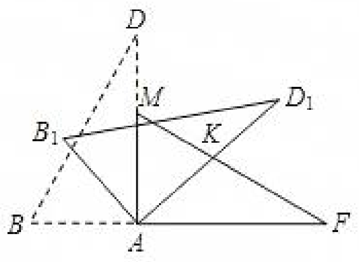


图 2

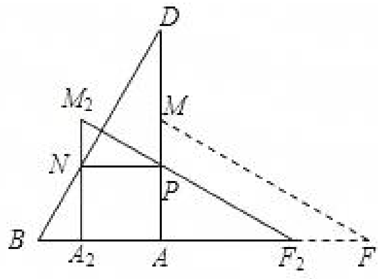


图 3

四．建模举例（第 10—12 题）

10．课本再现

如图 1，在等边△ABC 中，E 为边 AC 上一点，D 为 BC 上一点，且 $AE=CD$，连接 AD 与 BE 相交于点 F.

（1）AD 与 BE 的数量关系是 ＿＿＿＿＿＿，AD 与 BE 构成的锐角夹角∠BFD 的度数是 ＿＿＿＿＿；

深入探究

（2）将图 1 中的 AD 延长至点 G，使 $FG=BF$，连接 BG，CG，如图 2 所示．求证：GA 平分∠BGC.（第一问的结论，本问可直接使用）

迁移应用

（3）如图 3，在等腰△ABC 中，$AB=AC$，D，E 分别是边 BC，AC 上的点，AD 与 BE 相交于点 F．若∠$BAC=$∠BFD，且 $BF=3AF$，求$\frac{BD}{CD}$值.

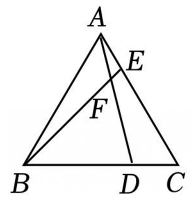


图1

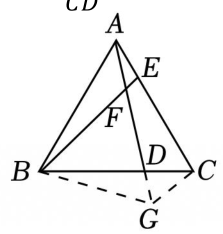


图2

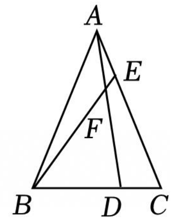


图3

11．【模型建构】

如图1，点 O 在直线 AB 上，射线 OC，OD 位于直线 AB 两侧，若∠1＝∠2，则称∠1，∠2 是关于直线 AB 的对称角．

当射线 OC，OD 位于 AB 同侧且∠1＝∠2 时，可以通过作对顶角构造出对称角，可以反向延长射线 OC，得到∠2＝∠3（如图 2），或者反向延长射线 OD，得到∠1＝∠3（如图 3）．

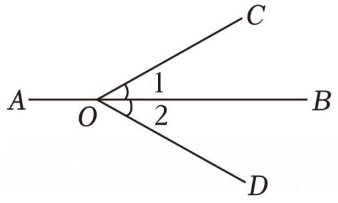


图1

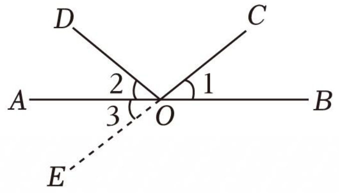


图2

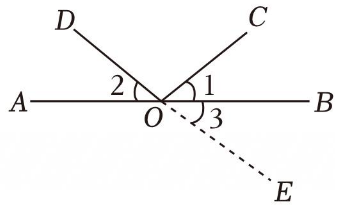


图3

【模型应用】

（1）小明受到模型启发，运用两种方法构造出对你角解决了下面问题：

如图 4，点 C，D 在 AB 上，点 E，F 在直线 AB 外，连接 CE，CF，DE，DF，若∠FDB＝∠EDA＝45°，EC＝CF，求∠ECF 的度数．

方法一：延长 ED 至 H，使 DH＝DF，连接 CH，

方法二：延长 FD 至 H，使 DH＝DE，连接 CH，

请你依照小明的解题思路，任选一种方法，写出证明过程；

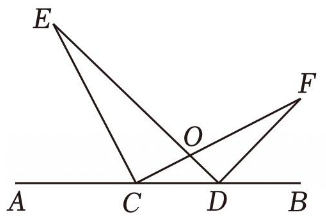


图4

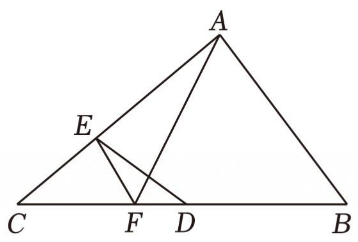


图5

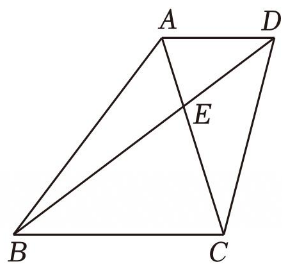


图6

（2）小明又尝试将（1）中问题进行变式提出了新问题，请你应用“对称角”模型构造全等三角形或者按照自己的解题思路解答．

如图 5，在 Rt△ABC 中，∠BAC＝90°，点 D 是 BC 的中点，点 E，F 分别在 AC，BC 上，∠AFB＝∠CFE，∠AED＝∠CEF，猜想 AF，EF，DE 之间的数量关系，并说明理由．

【学以致用】

（3）如图 6．在四边形 $ABCD$ 中，AD∥BC，∠BAC＝90° $-\frac{1}{2}$∠CAD，AC，BD 相交于点 E，且∠BEC＝60°，若 AD＝5，BD＝15，求 AC 的长．

12．数学活动课上，兴趣小组进行了如下讨论，请阅读并完成下列问题．

【问题初探】

如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 边上一动点（不与点 C，D 重合），过点 C 作 AE 的垂线交 AE 的延长线于点 F，交 AD 的延长线于点 G．

甲同学观察图 1 后发现结论：$\frac{DE}{DG}$＝①．

乙同学思考后认为可以改变四边形的形状，再探究．

如图 2，在矩形 $ABCD$ 中，E 为 CD 边上一动点（不与点 C，D 重合），过点 C 作 AE 的垂线交 AE 的延长线于点 F，交 AD 的延长线于点 G．若 AD＝m，CD＝n，则$\frac{DE}{DG}$＝②．

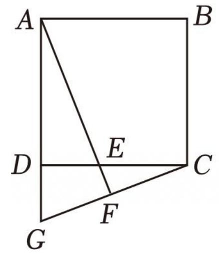


图 1

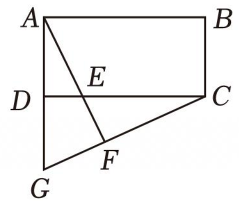


图 2

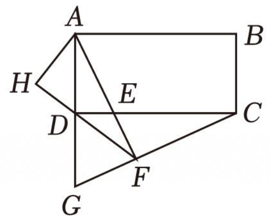
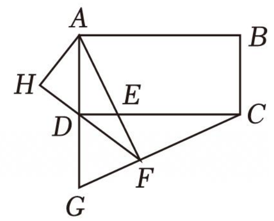


图 3



备用图

（1）上述材料中横线①处应填________，横线②处应填____________________．

（2）【问题延伸】丙同学在乙同学的基础上进一步提出问题：如图 3，在图 2 的基础上，连接 FD，过点 A 作 FD 的垂线交 FD 的延长线于点 H，求$\frac{AH}{HF}$的值．

（3）【问题解决】在（2）的基础上，若 AD＝2，CD＝4，点 E 为射线 CD 上一点，且 DE＝2，请直接写出 AH 的长．

参考答案与解析

1．解：（1）$EF\parallel MN$；

证明：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD\parallel BC$，

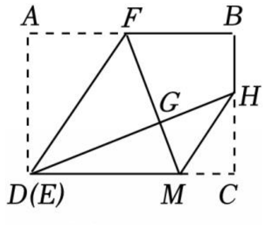
∴$\angle AEH=\angle CHE$，

∵$\angle GEF=\frac{1}{2}\angle AEH$，$\angle GHM=\frac{1}{2}\angle CHE$，

∴$\angle GEF=\angle GHM$，

∴$EF\parallel MN$；

（2）如图（3），连接 FH，设 $AB=2m$，$BC=2n$，



图（3）

∵$AF=FB$，$AF=FG$，

∴$FG=FB$，

由题意知 $\angle FGH=\angle FBH=90°$，

在 Rt△FGH 和 Rt△FBH 中，

$\begin{cases}FG=FB\\FH=FH\end{cases}$，

∴Rt△FGH≌Rt△FBH（HL），

∴$BH=GH$，

∵$GH=CH$，

∴$BH=GH=\frac{1}{2}BC=n$，

由（1）知 $EF\parallel MN$，

∴△FGD∽△MGH，

∴$\frac{FG}{MG}=\frac{DG}{HG}$，

∴$\frac{m}{MG}=\frac{2n}{n}=2$，

∴$CM=GM=\frac{1}{2}m$，

∴$DM=CD-CM=2m-\frac{1}{2}m=\frac{3}{2}m$，

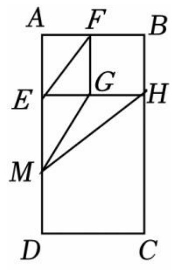
∵$DG^2+MG^2=MD^2$，$DG=AD=2n$，

∴$(2n)^2+(\frac{1}{2}m)^2=(\frac{3}{2}m)^2$，

∴$m=\sqrt{2}n$，

∴$\frac{AB}{AD}=\sqrt{2}$；

（3）当 $\angle MEG=90°$ 时，如图（4），



图（4）

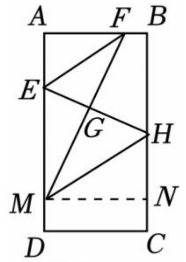
∴$\angle AEG=90°$，

∵$\angle A=\angle EGF=90°$，$AF=FG$，

∴四边形 $AEGF$ 是正方形，

∴$AE=AF=2dm$；

当 $\angle MGE=90°$ 时，如图（5），过点 M 作 $MN\perp BC$ 于点 N，



图（5）

$MN=AB=4dm$，

∵$\angle MGH=\angle MNH=90°$，

$\angle GHM=\angle NHM$，

$MH=HM$，

∴△GHM≌△NHM（AAS），

∴$MG=MN=4dm$，

∵$AF=FG=2dm$；

∴$MF=MG+GF=6dm$，

∴ $AM=\sqrt{MF^2-AF^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$（$dm$），

∵$\angle A=\angle MGE=90°$，

$\angle AMF=\angle AMF$，

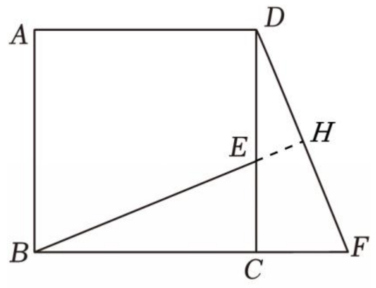
∴△MGE∽△MAF，

∴$\frac{MG}{MA}=\frac{EG}{AF}$，

∴$\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{EG}{2}$，

∴$AE=EG=\sqrt{2}dm$．

2．（1）证明：如图①，延长 BE 交 DF 于点 H．



①

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$BC=CD$，$\angle BCE=\angle DCF=90°$，

在△BCE 和△DCF 中，

$\begin{cases}CE=CF\\\angle BCE=\angle DCF\\BC=DC\end{cases}$，

∴△BCE≌△DCF（SAS），

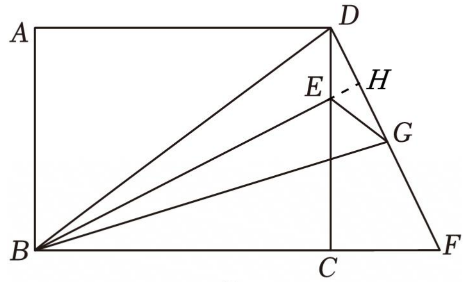
∴$\angle CBE=\angle CDF$，$BE=DF$，

∵$\angle BEC=\angle DEH$，$\angle BEC+\angle BCE+\angle CBE=\angle DEH+\angle CDF+\angle DHE=180°$，

∴$\angle BCE=\angle DHE=90°$，

∴$BE\perp DF$；

（2）解：如图②，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，$CE=2DE$，延长 BE 交 DF 于点 H．



②

∴$CD=AB=3$，$AD=BC=4$，$DE=1$，$CE=2$，

在 Rt△BCE 中，由勾股定理得：$BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

∵△BED 沿 BE 折叠得△BEG，

∴BE 垂直平分 DG，即 $DH=HG$，$BH\perp DF$，

∴$\angle DHE=90°=\angle BCE$，

∵$\angle BEC=\angle DEH$，

∴△BCE∽△DHE，

∴$\frac{DH}{BC}=\frac{DE}{BE}$，$\angle CDF=\angle CBE$，

∴$\frac{DH}{4}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$，

解得：$DH=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴$DG=2DH=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

∵$\tan\angle CDH=\tan\angle CBE=\frac{CE}{BC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

在 Rt△DCF 中，$\tan\angle CDF=\frac{CF}{CD}=\frac{1}{2}$，$CD=3$，

∴$CF=\frac{3}{2}$，

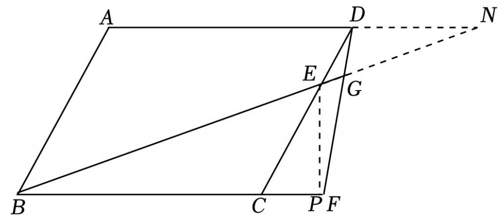
由勾股定理得：$DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=\sqrt{3^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，

∴$FG=DF-DG=\frac{3\sqrt{5}}{2}-\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$；

（3）解：$DG\bullet DF$ 的值为 2 或 3．理由如下：

由（2）得 $DE=1$，$CE=2$，$BC=CD=3$．

情况 1：$\angle BGF=60°$，则 $\angle DGE=120°$，如图③，过点 E 作 $EP\perp BC$ 交 BC 延长线于 P，延长 BG 交 AD 延长线于 N．



③

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle A=120°$，

∴$\angle BCD=\angle A=120°$，$AD\parallel BC$，$BC=AD=4$，

∴$\angle ECP=60°$，

∵$EP\perp BC$，

∴$\angle CEP=90°-60°=30°$，

在 Rt△CEP 中，$CP=\frac{1}{2}CE=1$，$PE=CE\cdot\sin60°=\sqrt{3}$

∴$BP=BC+CP=5$，

在直角三角形 BEP 中，由勾股定理得：

$BE=\sqrt{BP^2+PE^2}=\sqrt{5^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$，

∵$\angle BCD=\angle DGE=120°$，$\angle BEC=\angle DEG$，

∴△BCE∽△DGE，

∴$\frac{EG}{CE}=\frac{DG}{BC}=\frac{DE}{BE}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$，

∴$\frac{EG}{2}=\frac{DG}{4}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$，

解得：$EG=\frac{\sqrt{7}}{7}$，$DG=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

∴$BG=BE+EG=\frac{15\sqrt{7}}{7}$，

∵$AD\parallel BC$，

∴△NDE∽△BCE，

∴$\frac{DN}{BC}=\frac{NE}{BE}=\frac{DE}{CE}=\frac{1}{2}$

∴$NE=\frac{1}{2}BE=\sqrt{7}$，$DN=\frac{1}{2}BC=2$，

∴$NG=NE-EG=\frac{6\sqrt{7}}{7}$，

∵$AD\parallel BC$，

∴△NDG∽△BFG，

∴$\frac{DG}{FG}=\frac{NG}{BG}$，

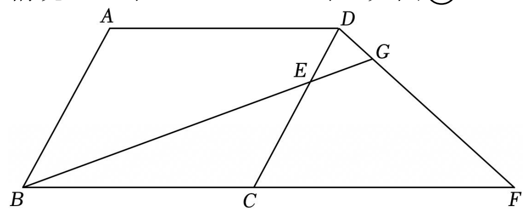
∴$\frac{\frac{2\sqrt{7}}{7}}{FG}=\frac{\frac{6\sqrt{7}}{7}}{\frac{15\sqrt{7}}{7}}$，

解得：$FG=\frac{5\sqrt{7}}{7}$（经检验，是分式方程的解，且符合题意），

∴$DF=DG+FG=\sqrt{7}$，

∴$DG\cdot DF=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\sqrt{7}=2$；

情况 2：当 $\angle BGD=60°$ 时，如图④，



④

∵$\angle BGD=60°$，$\angle BCD=120°$，

∴$\angle DGE=\angle DCF=180°-120°=60°$，

∵$\angle EDG=\angle FDC$，

∴△DGE∽△DCF，

∴$\frac{DG}{DC}=\frac{DE}{DF}$，

∴$DG\bullet DF=DC\bullet DE=3\times1=3$，

综上所述，$DG\bullet DF$ 的值为 2 或 3．

3．（1）证明：甲同学的思路：如图 1，分别延长 AD，BF 相交于点 P，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，

∴$\angle PDF=\angle C$，$\angle P=\angle FBC$，

∵F 为 CD 的中点，

∴$DF=CF$，

∴△PDF≌△BCF（AAS），

∴$FP=FB$，

即 F 为 BP 的中点，

∴$BF=\frac{1}{2}BP$，

∵$BE\perp AD$，

∴$\angle BEP=90°$，

∴$EF=\frac{1}{2}BP$，

∴$EF=BF$；

乙同学的思路：如图 2，取 AB 的中点 N，连接 FN 交 BE 于点 M，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=CD$，

∵F为CD的中点，N为AB的中点，

∴$DF=\frac{1}{2}CD$，$AN=\frac{1}{2}AB$，

∴$DF=AN$，

∵$DF\parallel AN$，

∴四边形$ANFD$是平行四边形，

∴$AD\parallel FN$，

∴$\angle BMN=\angle BEA$，$\frac{BM}{BE}=\frac{BN}{BA}=\frac{1}{2}$，

∴M为BE的中点，

∴$EM=BM$，

∵$BE\perp AD$，

∴$\angle BMN=\angle BEA=90°$，

∴$FN\perp BE$，

∴FN垂直平分BE，

∴$EF=BF$；

（2）证明：如图4，由翻折可知：$\angle CFB=\angle C'FB=\frac{1}{2}\angle CFC'$，$FC'=FC$，

∵F为CD的中点，

∴$FC=FD=\frac{1}{2}CD$，

∴$FC'=FD$，

∴$\angle FDC'=\angle FC'D$，

∵$\angle CFC'=\angle FDC+\angle FC'D$，

∴$\angle FC'D=\frac{1}{2}\angle CFC'$，

∴$\angle FC'D=\angle C'FB$，

∴$DG\parallel FB$，

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$DC\parallel AB$，$DC=AB$，

∴四边形$DGBF$是平行四边形，

∴$BG=DF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB$，

∴$AG=BG$；

（3）解：如图5，过点M作$ME\perp AB$于点E，过点D作$DF\perp AB$于点F，

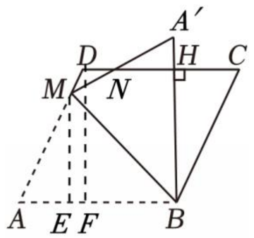


图5

∵平行四边形$ABCD$的面积为20，$AB=5$，

∴$AB\cdot DF=20$，

∴$DF=4$.

∵$DF\perp AB$，$AB\parallel CD$，

∴$DF\perp CD$，

∵$A'B\perp CD$，

∴四边形$DFBH$为矩形，

∴$BH=DF=4$，$\angle ABH=90°$，

∵将平行四边形$ABCD$沿过点B的直线折叠，点A的对应点为A'，

∴$\angle ABM=\angle A'BM=45°$，$BA=BA'=5$，$\angle A=\angle A'$.

∴$A'H=BA'-BH=1$.

∵$DF\perp AB$，

∴$\angle ABM=\angle BME=45°$，

∴$BE=ME$.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AD=BC=2\sqrt{5}$，

∴$AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=2$.

∴$\tan A=\frac{DF}{AF}=2$，

∴$\tan A=\frac{ME}{AE}=2$，

设$AE=x$，则$ME=2x$，

∴$BE=ME=2x$，

∴$AB=AE+BE=3x=5$，

∴$x=\frac{5}{3}$，

∴$ME=\frac{10}{3}$，

∵$\tan A'=\tan A=2$，

∴$\frac{NH}{HA'}=2$，

∴$NH=2$.

∵$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}AB\cdot ME=\frac{1}{2}\times5\times\frac{10}{3}=\frac{25}{3}$，

∴$S_{\triangle A'BM}=S_{\triangle ABM}=\frac{25}{3}$，

∴四边形$MBHN$的面积$=S_{\triangle A'BM}-S_{\triangle A'NH}$

$=\frac{25}{3}-\frac{1}{2}\times2\times1$

$=\frac{22}{3}$.

4. 解：（1）∵$\angle ABC=90°$，$\angle A=45°$，

∴$\triangle ABC$是等腰直角三角形，

∴$\angle A=\angle ACB=45°$，$AB=CB$，

同理：$BD=BE$，$\angle DBE=90°$，

∴$\angle ABC=\angle DBE$，

∴$\angle ABC-\angle CBD=\angle DBE-\angle CBD$，

即$\angle ABD=\angle CBE$，

∴$\triangle ABD\cong\triangle CBE$（SAS），

∴$AD=CE$，$\angle BCE=\angle BAD=45°$，

∴$\angle ACE=\angle ACB+\angle BCE=45°+45°=90°$，

（2）不成立，$CE=\sqrt{3}AD$，理由如下：

∵$BE\perp BD$，

∴$\angle DBE=\angle ABC=90°$，

又∵$\angle BAC=\angle BDE$，

∴$\triangle ABC\backsim\triangle DBE$，

∴$\frac{AB}{BC}=\frac{DB}{BE}$，

又∵$\angle ABC=\angle DBE$，

∴$\angle ABC-\angle CBD=\angle DBE-\angle CBD$，

即$\angle ABD=\angle CBE$，

∴$\triangle CBE\backsim\triangle ABD$，

∴$\frac{CE}{AD}=\frac{BC}{BA}$，

在Rt$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，

∴$\tan A=\frac{BC}{AB}=\tan60°=\sqrt{3}$，

∴$CE=\sqrt{3}AD$；

（3）∵$\angle A=30°$，$AC=2\sqrt{3}$，

∴$BC=$，$\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{3}BC=3$，

分两种情况：

①如图3，当$AB=AD=3$时，

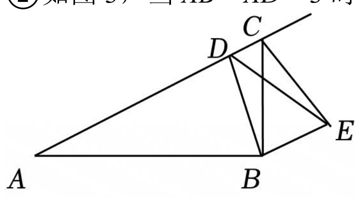


图3

同（2）可知，$\triangle CBE\backsim\triangle ABD$，

∴$\frac{CE}{AD}=\frac{BC}{BA}$，

∴$CE=BC=\sqrt{3}$；

②如图4，当$AB=BD=3$时，

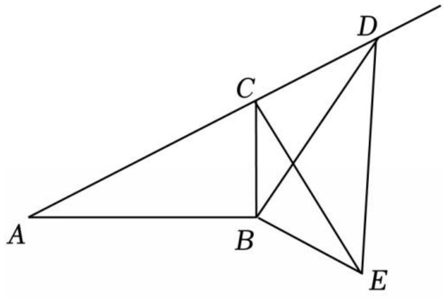


图4

则$\angle A=\angle ADB=30°$，

∵$\angle ABC=90°$，$\angle A=30°$，

∴$\angle ACB=90°-\angle A=60°$，

∵$\angle ACB=\angle CDB+\angle CBD$，

∴$\angle CBD=\angle ACB-\angle CDB=30°$，

∴$\angle CBD=\angle CDB=30°$，

∴$CD=BC=\sqrt{3}$，

∴$AD=AC+CD=3\sqrt{3}$，

同（2）可知，$\triangle CBE\backsim\triangle ABD$，

∴$\frac{CE}{AD}=\frac{BC}{BA}$，

即$\frac{CE}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

解得：$CE=3$；

综上所述，CE的长为$\sqrt{3}$或3.

5. 解：（1）∵正方形$ABCD$，正方形$BEFG$，

∴$BE=BG$，$\angle CBE=\angle ABG=90°$，$BC=BA$，

在$\triangle CBE$和$\triangle ABG$中，

$\begin{cases}BE=BG\\ \angle CBE=\angle ABG\\ BC=BA\end{cases}$，

∴$\triangle CBE\cong\triangle ABG$（SAS），

∴$CE=AG$，$\angle BEC=\angle AGB$，

∵$\angle AGF+\angle AGB=90°$，

∴$\angle AGF+\angle BEC=90°$，

（2）$AG=CE$；$\angle BEC-\angle AGF=90°$；

证明：∵正方形$ABCD$，正方形$BEFG$，

∴$BE=BG$，$\angle GBE=\angle ABC=90°$，$BC=BA$，

∴$\angle GBA=\angle EBC$，

在$\triangle CBE$和$\triangle ABG$中，

$\begin{cases}BE=BG\\ \angle EBC=\angle GBA\\ BC=BA\end{cases}$，

∴$\triangle CBE\cong\triangle ABG$（SAS），

∴$AG=CE$，$\angle AGB=\angle CEB$，

∵四边形$BEFG$是正方形，

∴$\angle BGF=90°$，

∴$\angle AGF=\angle AGB-\angle BGF=\angle BEC-90°$，

即$\angle BEC-\angle AGF=90°$；

（3）$\triangle AGF$的面积为$\frac{25}{2}$. 理由如下：

如图3，连接BF，连接BD与AC交于点O，

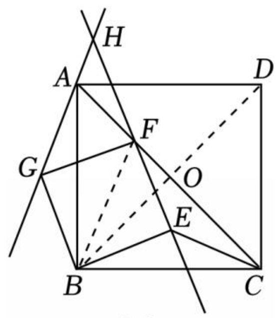


图3

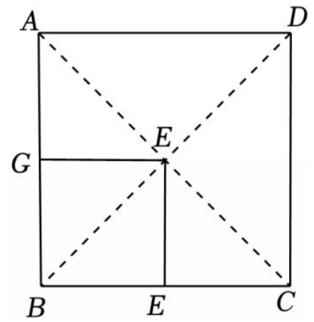
∵$AB=10$，$BE=5$，

∴ $AC=BD=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$，$BF=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$，

∴$BO=\frac{1}{2}BD=5\sqrt{2}=BF$，

∴F在AC上，

∴F、O重合，如图4，



∴$S_{\triangle AGF}=\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$.

6. 解：（1）结论：$AE=CF$.

理由：如图1中，

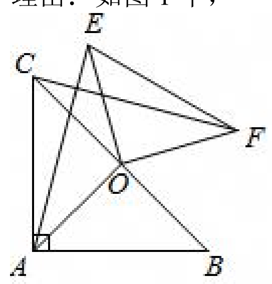


图1

∵$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，$OC=OB$，

∴$OA=OC=OB$，$AO\perp BC$，

∵$\angle AOC=\angle EOF=90°$，

∴$\angle AOE=\angle COF$，

∵$OA=OC$，$OE=OF$，

∴$\triangle AOE\cong\triangle COF$（SAS），

∴$AE=CF$.

（2）结论成立.

理由：如图2中，

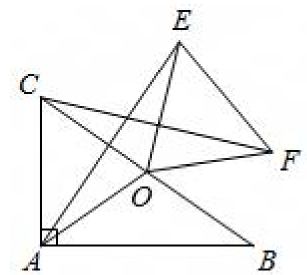


图2

∵$\angle BAC=90°$，$OC=OB$，

∴$OA=OC=OB$，

∵$\angle AOC=\angle EOF$，

∴$\angle AOE=\angle COF$，

∵$OA=OC$，$OE=OF$，

∴$\triangle AOE\cong\triangle COF$（SAS），

∴$AE=CF$.

（3）如图3中，

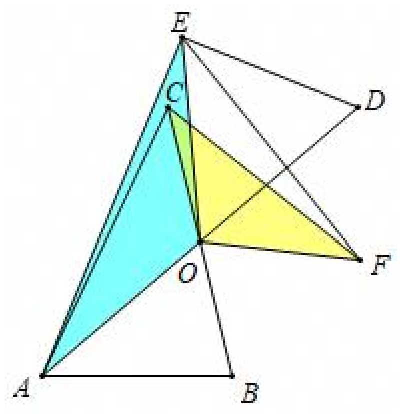


图3

由旋转的性质可知 $OE=OA$，

∵$OA=OD$，

∴$OE=OA=OD=5$，

∴$\angle AED=90°$，

∵$OA=OE$，$OC=OF$，$\angle AOE=\angle COF$，

∴$\frac{OA}{OC}=\frac{OE}{OF}$，

∴$\triangle AOE\backsim\triangle COF$，

∴$\frac{AE}{CF}=\frac{OA}{OC}$，

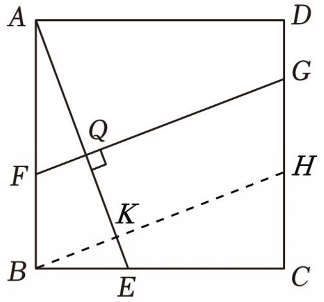
∵$CF=OA=5$，

∴$\frac{AE}{5}=\frac{5}{3}$，

∴$AE=\frac{25}{3}$，

∴ $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{10^2-(\frac{25}{3})^2}=\frac{5\sqrt{11}}{3}$.

7.（1）证明：方法1：平移线段 FG 至 BH 交 AE 于点 K，如图，



由平移的性质得 $FG\parallel BH$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=BC$，$\angle ABE=\angle C=90°$，

∴四边形 $BFGH$ 是平行四边形，

∴$BH=FG$，

∵$FG\perp AE$，

∴$BH\perp AE$，

∴$\angle BKE=90°$，

∴$\angle KBE+\angle BEK=90°$，

∵$\angle BEK+\angle BAE=90°$，

∴$\angle BAE=\angle CBH$，

在$\triangle ABE$ 和$\triangle BCH$ 中，

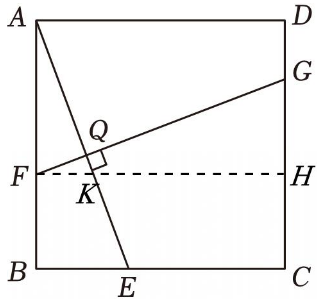
$\begin{cases}\angle BAE=\angle CBH\\ AB=BC\\ \angle ABE=\angle C\end{cases}$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle BCH$（$ASA$），

∴$AE=BH$，

∴$AE=FG$；

方法2：平移线段 BC 至 FH 交 AE 于点 K，如图，



则四边形 $BCHF$ 是矩形，$\angle AKF=\angle AEB$，

∴$FH=BC$，$\angle FHG=90°$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle ABE=90°$，

∴$AB=FH$，$\angle ABE=\angle FHG$，

∵$FG\perp AE$，

∴$\angle HFG+\angle AKF=90°$，

∵$\angle AEB+\angle BAE=90°$，

∴$\angle BAE=\angle HFG$，

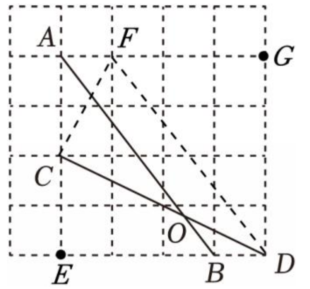
在$\triangle ABE$ 和$\triangle FHG$ 中，

$\begin{cases}\angle BAE=\angle HFG\\ AB=FH\\ \angle ABE=\angle FHG\end{cases}$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle FHG$（$ASA$），

∴$AE=FG$；

（2）解：将线段 AB 向右平移至 FD 处，使得点 B 与点 D 重合，连接 CF，如图，



∴$\angle AOC=\angle FDC$，

设正方形网格中小正方形的边长为单位 1，则 $AC=2$，$AF=1$，$CE=2$，$DE=4$，$FG=3$，$DG=4$，

由勾股定理可得，$CF=\sqrt{AC^2+AF^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$DF=\sqrt{FG^2+DG^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

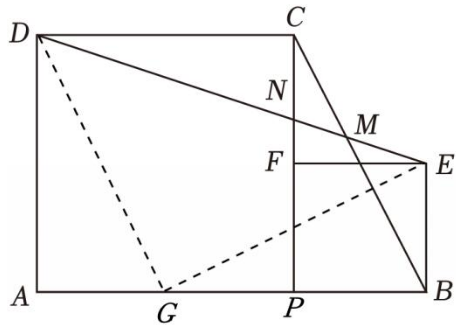
∵$(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2=5^2$，

即 $CF^2+CD^2=DF^2$，

∴$\triangle DCF$ 为直角三角形，$\angle FCD=90°$，

∴$\sin\angle AOC=\sin\angle FDC=\frac{CF}{FD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

（3）解：①平移线段 BC 至 DG 处，连接 GE，如图，



则$\angle DMC=\angle GDE$，四边形 $DGBC$ 是平行四边形，

∴$DC=GB$，

∵四边形 $ADCP$ 与四边形 $PBEF$ 都是正方形，

∴$DC=AD=AP$，$BP=BE$，$\angle DAG=\angle GBE=90°$，

∴$DC=AD=AP=GB$，

∴$AG=BP=BE$，

在$\triangle AGD$ 和$\triangle BEG$ 中，

$\begin{cases}AG=BE\\ \angle DAG=\angle GBE\\ AD=GB\end{cases}$，

∴$\triangle AGD\cong\triangle BEG$（$SAS$），

∴$DG=EG$，$\angle AGD=\angle EGB$，

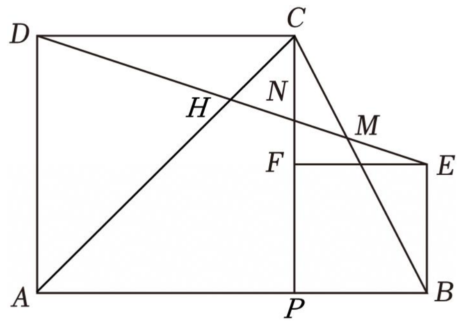
∴$\angle EGB+\angle AGD=\angle ADG+\angle AGD=90°$，

∴$\angle EGD=90°$，

∴$\angle GDE=\angle GED=45°$，

∴$\angle DMC=\angle GDE=45°$；

②如图，



∵AC 为正方形 $ADCP$ 的对角线，$\angle DMC=45°$，

∴$\angle DAC=\angle PAC=45°=\angle DMC$，

∴$AC=\sqrt{2}AD$，

∴$\angle HCM=\angle BCA$，

∴$\angle AHD=\angle CHM=\angle ABC$，

∴$\triangle ACB\backsim\triangle ADH$，

∴$\frac{BC}{DH}=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{2}AD}{AD}=\sqrt{2}$.

8.（1）证明：∵四边形 $ABHD$ 是矩形，

∴$AB=DH=2\sqrt{3}$，$\angle DHB=\angle DHC=90°$，

在 Rt$\triangle AQM$ 中，$\angle Q=90°$，$\angle QAM=30°$，$AM=4\sqrt{3}$，

∴$QM=\frac{1}{2}AM=2\sqrt{3}$，

∴$QM=DH$，

∵$\angle Q=\angle DHC=90°$，$\angle QAM=\angle C=30°$，

在$\triangle PQM$ 和$\triangle CHD$ 中，

$\begin{cases}\angle QPM=\angle C\\ \angle PQM=\angle CHD\\ QM=DH\end{cases}$，

∴$\triangle PQM\cong\triangle CHD$（$AAS$）；

（2）解：①如图 1 中，PQ 扫过的面积＝平行四边形 $AQQ'D$ 的面积+扇形 $DQ'Q''$ 的面积.

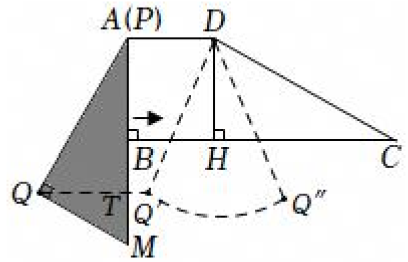


图1

设 QQ' 交 AM 于点 T.

∵$AQ=\sqrt{3}QM=6$，$QT\perp AM$，

∴$AT=AQ\cdot\cos30°=3\sqrt{3}$，

∴ PQ 扫过的面积 $=3\times3\sqrt{3}+\frac{50\cdot\pi\cdot6^2}{360}=9\sqrt{3}+5\pi$；

②如图 2－1 中，连接 DK. 当 PM 运动到与 DH 重合时，

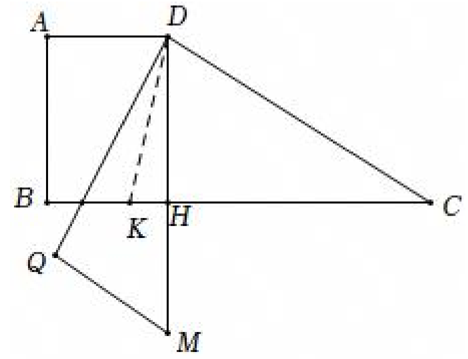


图2－1

∵$BH=AD=3$，$BK=9-4\sqrt{3}$，

∴$KH=3-(9-4\sqrt{3})=4\sqrt{3}-6$，

∴$CK=4\sqrt{3}-6+6=4\sqrt{3}$，

∵$CD=2DH=4\sqrt{3}$，

∴$CD=CK$，

∴$\angle CKD=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°$，

∴$\angle KDH=15°$，

∵$\angle QDK=30°-15°=15°$，

∴点 K 在$\triangle PQM$ 区域（含边界）内的时长 $\frac{4\sqrt{3}-6}{1}+\frac{15}{5}=(4\sqrt{3}-3)s$；

③如图 3 中，

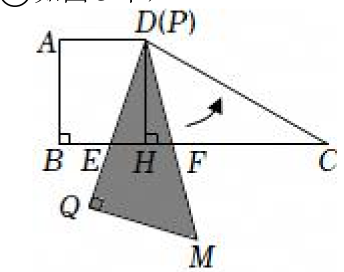


图3

在 Rt$\triangle CDH$ 中，$DH=2\sqrt{3}$，$\angle C=30°$，

∴$CH=\sqrt{3}DH=6$，

∵$BH=3$，$BE=d$，

∴$EH=|3-d|$，

∵$DH=2\sqrt{3}$，$\angle DHE=90°$，

∴$DE^2=EH^2+DH^2=(3-d)^2+(2\sqrt{3})^2$，

∵$\angle DEF=\angle CED$，$\angle EDF=\angle C=30°$，

∴$\triangle DEF\backsim\triangle CED$，

∴$DE^2=EF\cdot EC$，

∴$(3-d)^2+12=EF\cdot(9-d)$，

∴$EF=\frac{d^2-6d+21}{9-d}$，

∴ $CF=BC-BE-EF=9-d-\frac{d^2-6d+21}{9-d}=\frac{60-12d}{9-d}$.

9．解：（1）结论：$BD=MF$，$BD\perp MF$．理由：

如图1，延长FM交BD于点N，

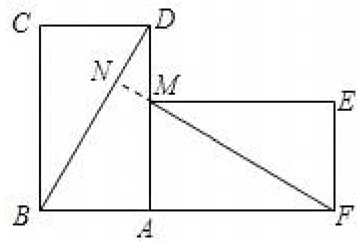


图1

由题意得：$\triangle BAD\cong\triangle MAF$．

∴$BD=MF$，$\angle ADB=\angle AFM$．

又∵$\angle DMN=\angle AMF$，

∴$\angle ADB+\angle DMN=\angle AFM+\angle AMF=90°$，

∴$\angle DNM=90°$，

∴$BD\perp MF$．

（2）如图2，

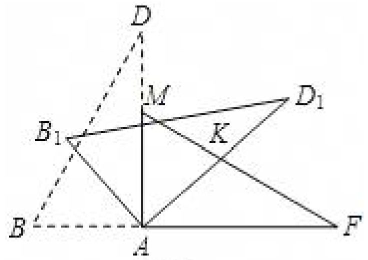


图 2

①当$AK=FK$时，$\angle KAF=\angle F=30°$，

则$\angle BAB_1=180°-\angle B_1AD_1-\angle KAF=180°-90°-30°=60°$，

即β=60°；

②当$AF=FK$时，$\angle FAK=\frac{1}{2}(180°-\angle F)=75°$，

∴$\angle BAB_1=90°-\angle FAK=15°$，

即β=15°；

综上所述，β的度数为60°或15°；

（3）如图3，

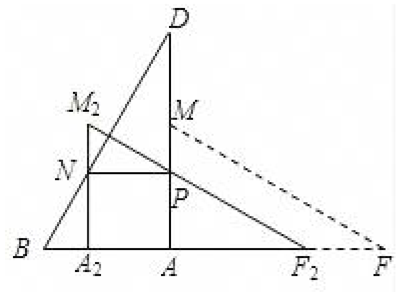


图 3

由题意得矩形PNA_2A．设$A_2A=x$，则$PN=x$，

在Rt$\triangle A_2M_2F_2$中，∵$F_2M_2=FM=16$，$\angle F=\angle A_2F_2P=\angle ADB=30°$，

∴$A_2M_2=8$，$A_2F_2=8\sqrt{3}$，

∴$AF_2=8\sqrt{3}-x$．

∵$\angle PAF_2=90°$，$\angle PF_2A=30°$，

∴$AP=AF_2\cdot\tan30°=8-\frac{1}{3}\sqrt{3}x$，

∴$PD=AD-AP=8\sqrt{3}-8+\frac{1}{3}\sqrt{3}x$．

∵$NP\parallel AB$，

∴$\angle DNP=\angle B$．

∵$\angle D=\angle D$，

∴$\triangle DPN\sim\triangle DAB$，

∴$\frac{PN}{AB}=\frac{DP}{DA}$，

∴$\frac{x}{8}=\frac{8\sqrt{3}-8+\frac{1}{3}\sqrt{3}x}{8\sqrt{3}}$，

解得$x=12-4\sqrt{3}$，即$A_2A=12-4\sqrt{3}$，

∴平移的距离是（$12-4\sqrt{3}$）cm．

10．（1）解：∵$\triangle ABC$是等边三角形，

∴$AB=CA$，$\angle BAE=\angle C=60°$，

在$\triangle ACD$和$\triangle BAE$中，

$$\begin{cases}CA=AB\\ \angle C=\angle BAE,\\ CD=AE\end{cases}$$

∴$\triangle ACD\cong\triangle BAE$（$SAS$）．

∴$AD=BE$，$\angle CAD=\angle ABE$，

∴$\angle BFD=\angle ABE+\angle BAD=\angle CAD+\angle BAD=\angle BAC=60°$，

（2）证明：由（1）可知，$\angle BFD=60°$，

∴$\angle AFB=120°$，

∵$FG=BF$，

∴$\triangle BFG$是等边三角形，

∴$BF=BG$，$\angle FBG=\angle BGF=60°$，

∵$\triangle ABC$是等边三角形，

∴$AB=CB$，$\angle ABC=60°$，

∴$\angle ABC=\angle FBG$，

∴$\angle ABC-\angle FBD=\angle FBG-\angle FBD$，

即$\angle ABF=\angle CBG$，

∴$\triangle ABF\cong\triangle CBG$（$SAS$），

∴$\angle AFB=\angle CGB=120°$，

∴$\angle CGF=\angle CGB-\angle BGF=120°-60°=60°$，

∴$\angle BGF=\angle CGF$，

∴GA平分$\angle BGC$；

（3）解：如图3，延长FD至点G，使$FG=BF$，连接BG、CG，过点D作$DM\perp BG$于点M，$DN\perp CG$于点N，

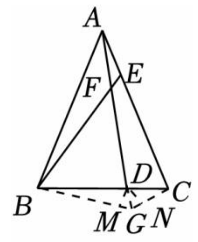


图3

∵$AB=AC$，$FG=BF$，

∴$\frac{AB}{AC}=\frac{FB}{FG}$，

∵$\angle BAC=\angle BFD$，

∴$\triangle ABC\sim\triangle FBG$，

∴$\frac{AB}{FB}=\frac{BC}{BG}$，$\angle ABC=\angle FBG$，

∴$\angle ABC-\angle CBE=\angle FBG-\angle CBE$，

即$\angle ABF=\angle CBG$，

∴$\triangle ABF\sim\triangle CBG$，

∴$\frac{BG}{CG}=\frac{BF}{AF}=3$，$\angle BAF=\angle BCG$，

∵$\angle ADB=\angle CDG$，

∴$\angle CGD=\angle ABD$，

∵$AB=AC$，$FG=BF$，

∴$\angle ABC=\angle ACB$，$\angle FBG=\angle FGB$，

∵$\angle BAC=\angle BFD$，

∴$\angle BAC=\angle FGB$，

∴$\angle CGD=\angle FGB$，

∴DG平分$\angle BGC$，

∵$DM\perp BG$，$DN\perp CG$，

∴$DM=DN$，

∵$S_{\triangle BGD}=\frac{1}{2}BG\cdot DM$，$S_{\triangle CGD}=\frac{1}{2}CG\cdot DN$，

∴$\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle CGD}}=\frac{\frac{1}{2}BG\cdot DM}{\frac{1}{2}CG\cdot DN}=\frac{BG}{CG}=3$，

又∵$\frac{S_{\triangle BGD}}{S_{\triangle CGD}}=\frac{BD}{CD}$，

∴$\frac{BD}{CD}=3$．

方法二：如图4，过点D作$DP\parallel AB$交AC于点P，

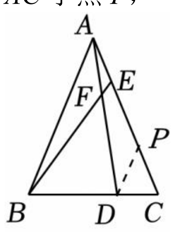


图4

则$\angle BAF=\angle ADP$，$\angle ABC=\angle PDC$，

∵$\angle BAC=\angle BFD$，$\angle BFD=\angle ABF+\angle BAF$，$\angle BAC=\angle BAF+\angle DAP$，

∴$\angle ABF=\angle DAP$，

∴$\triangle ABF\sim\triangle DAP$，

∴$\frac{BF}{AP}=\frac{AF}{DP}$，

即$\frac{BF}{AF}=\frac{AP}{DP}=3$，

∵$AB=AC$，

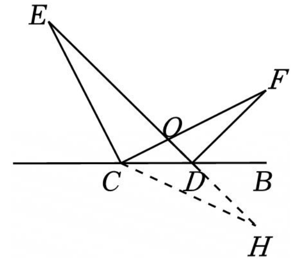
∴$\angle ABC=\angle ACB=\angle PDC$，

∴$PD=PC$，

∵$DP\parallel AB$，

∴$\frac{BD}{DC}=\frac{AP}{PC}=\frac{AP}{DP}=3$．

11．解：（1）方法一：如图1，延长ED至H，使$DH=DF$，连接CH，



∵$\angle FDB=\angle EDA=45°$，

∴$\angle FDC=\angle HDC=135°$，

∵$CD=CD$，

∴$\triangle FDC\cong\triangle HDC$（$SAS$）．

∴$HC=FC$，$\angle F=\angle H$．

∵$EC=CF$，

∴$EC=CH$．

∴$\angle E=\angle H$．

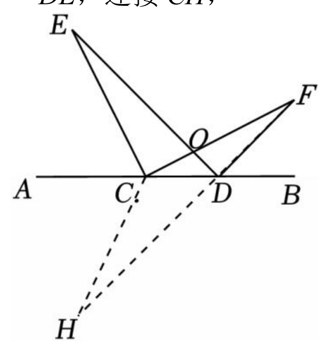
∴$\angle E=\angle F$．

∵$\angle EOC=\angle FOD$，

∴$\triangle EOC\sim\triangle FOD$．

∴$\angle ECF=\angle EDF=90°$；

方法二：如图2，延长FD至H，使$DH=DE$，连接CH．



∵$\angle FDB=\angle EDA=\angle CDH=45°$，且$CD=CD$，

∴$\triangle EDC\cong\triangle HDC$（$SAS$）．

∴$HC=EC$，$\angle E=\angle H$．

∵$EC=CF$，

∴$CF=CH$．

∴$\angle F=\angle H$．

∴$\angle E=\angle F$．

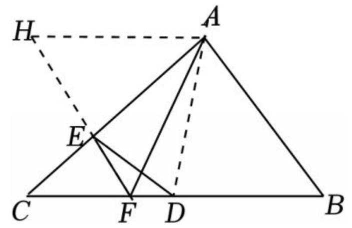
∵$\angle EOC=\angle FOD$，

∴$\triangle EOC\sim\triangle FOD$．

∴$\angle ECF=\angle EDF=90°$；

（2）$AF=EF+DE$．

理由：如图3，延长FE至H，使$EH=ED$，连接AH，AD，



∵$\angle AED=\angle CEF$，$\angle CEF=\angle AEH$，

∴$\angle AED=\angle AEH$，

∵$EH=ED$，$AE=AE$，

∴$\triangle AED\cong\triangle AEH$（$SAS$）．

∴$\angle HAE=\angle DAE$．

∵Rt$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，点D是BC的中点．

∴$AD=CD$．

∴$\angle C=\angle DAE$，

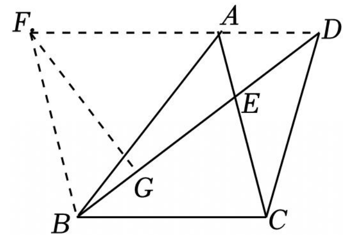
∴$\angle C=\angle HAE$．

∴$AH\parallel CB$．

∴$\angle H=\angle CFE=\angle AFB=\angle HAF$．

∴$AF=HF=EF+EH=EF+DE$．

（3）如图，延长DA至F，使$AF=AC$，过点F作$FG\perp DB$于D．



∵$\angle BAC=90°-\frac{1}{2}\angle CAD$．

∴　　$\angle BAF=180°-\angle CAD-\angle BAC=90°-\frac{1}{2}\angle CAD$．

∴$\angle BAF=\angle BAC$．

∴$\triangle ABF\cong\triangle ABC$（$SAS$）．

∴$BF=BC$．

又∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle BAF=\angle ABC$．

∴$\angle BAC=\angle ABC$．

∴$AC=BC$．

∴$AC=BC=BF=AF$．

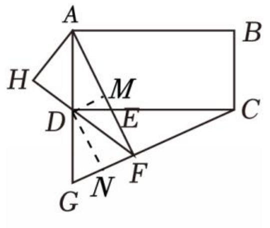
∴四边形$ACBF$是菱形．

∵$BF\parallel AC$，

∴$\angle FBG=\angle BEC=60°$，$FG\perp BD$，

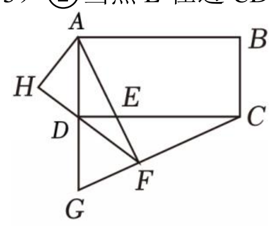
∴∠FGB=∠FGD=90°．∠BFG=30°，
设AC=BC=BF=AF=x，
∵AD=5，BD=15，
∴DF=5+x，$BG=\frac{1}{2}x$，$FG=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$DG=15-\frac{1}{2}x$.
Rt△FDG中，由勾股定理得$FG^2+DG^2=DF^2$，
∴$(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2+(15-\frac{1}{2}x)^2=(5+x)^2$.
∴x=8.
即AC=8.

12. 解：（1）①∵正方形$ABCD$，
∴AB=BC=CD=DA，∠ABC=∠BCD=∠CDA=∠DAB=90°，
∵AE⊥CF，
∴∠AFC=90°，
∵∠AED=∠CEF，
∴∠DAE=∠FCE，
∴tan∠DAE=tan∠DCG，
∴$\frac{DE}{DG}=\frac{AD}{DC}$，
∵CD=DA，
∴$\frac{DE}{DG}=1$；
②∵矩形$ABCD$，
∴AB=CD，BC=DA，∠ABC=∠BCD=∠CDA=∠DAB=90°，
∵AE⊥CF，
∴∠AFC=90°，
∵∠AED=∠CEF，
∴∠DAE=∠FCE，
∴tan∠DAE=tan∠DCG，
∴$\frac{DE}{DG}=\frac{AD}{DC}$，
∵AD=m，CD=n，
∴$\frac{DE}{DG}=\frac{m}{n}$.
（2）过点D分别作AF，CG的垂线，垂足分别为M，N，如解图1.



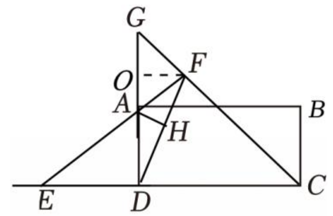
解图1

∵AF⊥CG，∠GAF+∠G=90°，
∵∠DCG+∠G=90°，
∴∠GAF=∠GCD.
∵DM⊥AF，DN⊥CG，
∴∠AMD=∠CND=90°
∴△ADM∽△CDN.
∴$\frac{DM}{DN}=\frac{AD}{CD}=\frac{m}{n}$.
∵DM⊥AF，DN⊥CG，MF⊥CG，
故四边形$DMFN$为矩形，
∴DN=MF
∴$\frac{DM}{MF}=\frac{m}{n}$.
∴$\tan\angle AFH=\frac{AH}{HF}=\frac{DM}{MF}=\frac{m}{n}$.
∴$\frac{AH}{HF}$的值为$\frac{m}{n}$.
（3）①当点E在边CD上时，如解图2，



解图2

∵AD=DE=2，
∴△ADE为等腰直角三角形，
∴∠DAE=45°．
由（1），知$\frac{DE}{DG}=\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$，
∴DG=2DE=4，
∴AG=AD+DG=6.
∵AF⊥CG，∠DAE=45°，
∴$AF=\frac{\sqrt{2}}{2}AG=3\sqrt{2}$.
由（2），知$\frac{AH}{HF}=\frac{AD}{CD}=\frac{1}{2}$，
设AH=x，则HF=2x.
在Rt△AHF中，$AH^2+HF^2=AF^2$，即$x^2+(2x)^2=(3\sqrt{2})^2$，
解得$x=\frac{3\sqrt{10}}{5}$（负值已舍去）.
②当点E在CD的延长线上时，过点F作FO⊥DG于点O，
如解图3，同理①，易得∠GAF=∠EAD=45°，



解图3

∵AF⊥CG，∴∠G=45°，
∴△GDC为等腰直角三角形.
∴DG=CD=4.
∴AG=DG－AD=2.
∵OF⊥AG，
∴$OF=OA=\frac{1}{2}AG=1$.
∴OD=3.
∴$DF=\sqrt{OF^2+OD^2}=\sqrt{10}$.
∴ $S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}AH\cdot DF=\frac{1}{2}AD\cdot OF$，即$\sqrt{10}AH=2\times 1$，
解得$AH=\frac{\sqrt{10}}{5}$.
综上所述，AH的长为$\frac{3\sqrt{10}}{5}$或$\frac{\sqrt{10}}{5}$.