

义务教育教科书（五·四学制）

数学

九年级 上册



 山东教育出版社

· 济南 ·

主 编：马 复

编写人员：颜 峰 尚凡清 魏相清 岳绍杰

原欢春 凌晓牧 张宇清 杨泽忠

责任编辑：王 利

责任校对：任军芳

封面设计：吴江楠 尹媛媛

YIWU JIAOYU JIAOKESHU (WU · SI XUEZHI)

SHUXUE

JIU NIANJI SHANG CE

义务教育教科书（五·四学制）

数学

九年级 上册

出 版：山东出版传媒股份有限公司

山东教育出版社（济南市市中区二环南路2066号4区1号）

网 址：www.sjs.com.cn

发 行：山东新华书店集团有限公司

印 刷：

版 次： 年 月第1版

印 次： 年 月第1次印刷

开 本：787毫米×1092毫米 1/16

印 张：10.5

字 数：210千

书 号：ISBN 978-7-5701- -

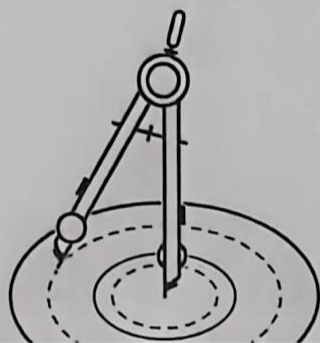
定 价： 元

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究

山东出版传媒股份有限公司教材中心售后服务电话：(0531) 82098188



扫描全能王 创建



走进数学新天地

亲爱的同学，祝贺你步入义务教育阶段的最后一个学年！

前几年的数学学习生活使我们接触到许多数学研究对象，经历了许多有意义的数学活动，掌握了一些学习数学的基本方法，有了学好数学的信心……

在本册教科书中，我们将要学习一些新的内容——

直角三角形的边角关系与生活密切相关，与相似、比例、函数等有着千丝万缕的联系，学习它将有损于我们了解数形之间的关系，进一步体会数学的价值。

二次函数是一种较为复杂的“经典”函数，对它的研究将使我们体会到二次函数的广泛应用及研究函数的基本思路与方法，而这一切又是你未来学习数学的重要基础。

反比例函数是你初中阶段学习的最后一种函数模型，学习过后，相信你对函数的认识会更加丰富。

物体在灯光下、太阳光下都有影子，物体的这些影子有什么特点和规律？从数学的角度如何来认识它们？通过学习，你将发现“数学会使我们看得更深刻”。

另外，通过制作遮阳篷模型、设计拱桥形状及研究矩形周长和面积加倍问题，你会进一步感受到数学在生活中的广泛应用。

学好数学当然不是轻而易举就能做到的，数学也不是高不可攀的。自己读一读教科书，想一想、做一做，与同伴们议一议，听一听老师的讲解，并在日常生活中尝试使用数学。事实上，对数学了解得越多，你就越能体会到它的意义与趣味。

让我们一起走进数学新天地！



目录

第一章 直角三角形的边角关系

1 锐角三角函数·····	2
2 解直角三角形·····	19
3 三角函数的应用·····	26
★ 问题解决活动：利用三角函数测高·····	33
回顾与思考 ·····	35
复习题 ·····	35

第二章 二次函数

1 对函数的再认识 ·····	42
2 认识二次函数 ·····	49
3 二次函数的图象与性质 ·····	51
4 确定二次函数的表达式 ·····	72
5 二次函数的应用 ·····	76
6 二次函数与一元二次方程 ·····	85
★ 问题解决活动：怎样围面积最大 ·····	91
回顾与思考 ·····	92
复习题 ·····	92



第三章 反比例函数

1 认识反比例函数	100
2 反比例函数的图象与性质	104
3 反比例函数的应用	113
回顾与思考	118
复习题	118

第四章 投影与视图

1 投影	122
2 视图	137
回顾与思考	148
复习题	148

综合与实践

制作遮阳篷模型	153
拱桥形状设计	154
能将矩形的周长和面积同时加倍吗	155

总复习题	157
------------	-----

[本教科书中标有※的内容为选学内容，不作考试要求。]



第一章

直角三角形的边角关系

生活中人们常常利用角度进行测量。例如，通过测量适当的角度和距离就可以计算出一些大型建筑物的高度。你知道其中的道理吗？

我们已经研究了直角三角形边与边之间的关系、角与角之间的关系，本章将进一步探索直角三角形的边与角之间的关系。你将经历利用直角三角形中已知的边和角求解未知的边和角，进而解决一些简单的实际问题，发展几何直观，提升推理能力和应用意识。

💡 在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：

◎ 本章对直角三角形做了哪些研究？为什么要着力研究直角三角形？

◎ 你对三角形内角与三角形三边之间的关系有哪些新的认识？



1

锐角三角函数

梯子是我们日常生活中常见的物体（如图 1-1）。

（1）在图 1-2 中，梯子 AB 和 EF 哪个更陡？你是怎样判断的？你有几种判断方法？



图 1-1

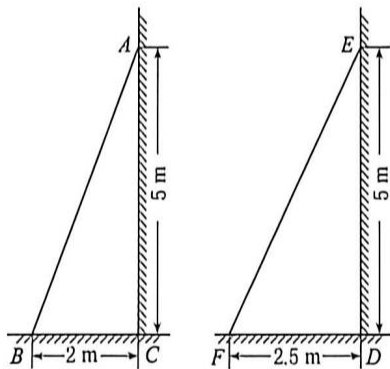


图 1-2

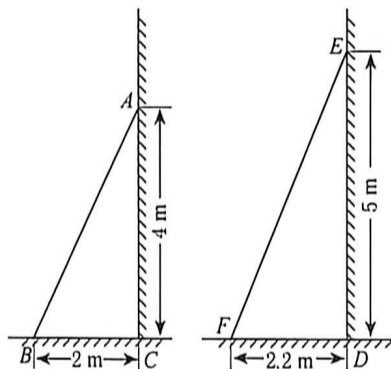


图 1-3

（2）在图 1-3 中，梯子 AB 和 EF 哪个更陡？你是怎样判断的？

尝试·思考

如图 1-4， B_1 ， B_2 是梯子 AB 上的点， $B_1C_1 \perp AC$ ，垂足为 C_1 ， $B_2C_2 \perp AC$ ，垂足为 C_2 。小明想通过测量 B_1C_1 及 AC_1 ，算出它们的比，来说明

梯子 AB 的倾斜程度；而小亮则认为，通过测量 B_2C_2 及 AC_2 ，算出它们的比，也能说明梯子 AB 的倾斜程度。你同意他们的看法吗？

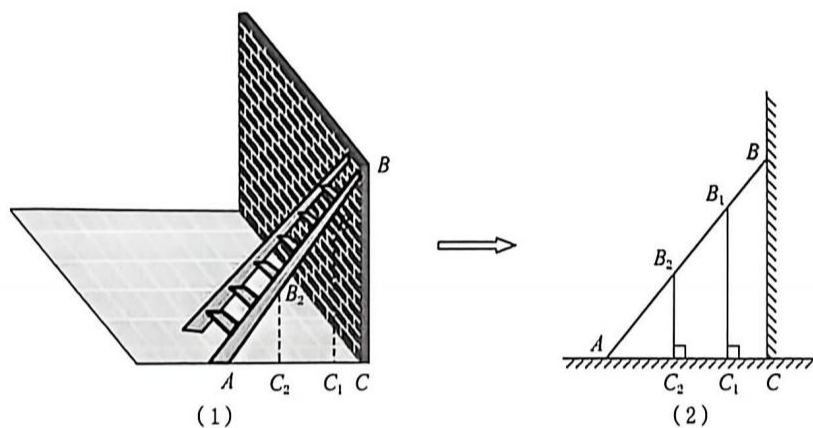


图 1-4

在图 1-4(2) 中，

(1) $\frac{B_1C_1}{AC_1}$ 与 $\frac{B_2C_2}{AC_2}$ 有什么关系？为什么？

(2) 如果改变点 B_2 在 AB 上的位置并保持 $B_2C_2 \perp AC$ (垂足为 C_2) 呢？

由此你能得出什么结论？

如图 1-5，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，如果锐角 A 确定，那么 $\angle A$ 的对边与邻边的比便随之确定，这个比叫作 $\angle A$ 的正切 (tangent)，记作 $\tan A$ ^❶，即

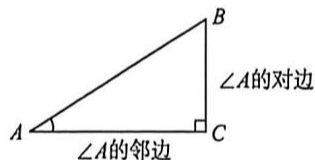


图 1-5

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}}.$$

思考·交流

在图 1-4 中，梯子的倾斜程度与 $\tan A$ 有怎样的关系？与同伴进行交流。

当锐角 A 变化时， $\tan A$ 的值也随之变化。 $\tan A$ 的值越大，梯子越陡。

❶ $\tan A$ 是一个完整的符号，它表示 $\angle A$ 的正切，当用一个大写字母表示角时，记号里习惯省去角的符号“ $\angle$ ”。后面的 $\sin A$ ， $\cos A$ 也是这样。

例1 图 1-6 表示甲、乙两部自动扶梯，哪一部自动扶梯更陡？

解：甲扶梯中，

$$\tan \alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

乙扶梯中，

$$\tan \beta = \frac{5}{\sqrt{13^2 - 5^2}} = \frac{5}{12}.$$

因为 $\tan \alpha > \tan \beta$ ，所以甲扶梯更陡。

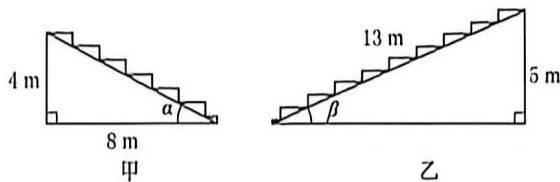


图 1-6

正切也经常用来描述山坡的坡度^①。例如，有一山坡在水平方向上每前进 100 m 就升高 60 m (如图 1-7)，那么这个山坡的坡度就是

$$\tan \alpha = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

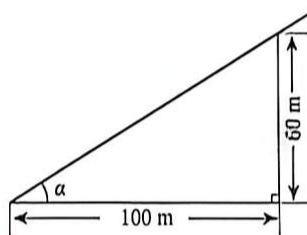
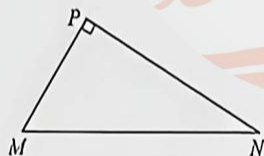


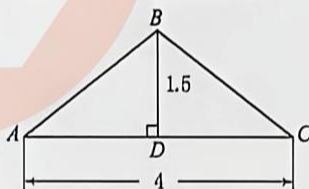
图 1-7

随堂练习

1. 如图，在 $\triangle MNP$ 中， $\angle P = 90^\circ$ ， $\angle M$ 的对边是_____， $\angle M$ 的邻边是_____； $\angle N$ 的对边是_____， $\angle N$ 的邻边是_____。



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BA = BC$ ，你能根据图中所给数据求出 $\tan C$ 吗？
3. 如图，某人从山脚下的点 A 走了 200 m 后到达山顶的点 B，已知点 B 到山脚的垂直距离为 55 m，求这座山的坡度 (结果精确到 0.001)。



(第 3 题)

^① 坡面的铅直高度与水平宽度的比称为坡度 (或坡比)。

习题 1.1.1

知识技能

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=5$, $AB=13$, 求 $\tan A$ 和 $\tan B$ 。

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=3$, $\tan A=\frac{5}{12}$, 求 AC 。

联系拓广

3. 观察学校、家或附近建筑物的楼梯, 哪个更陡? 你是如何估计的?

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\tan A$ 与 $\tan B$ 有怎样的关系?

如图 1-8, 当 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中的锐角 A 确定时, $\angle A$ 的对边与邻边的比便随之确定。此时, 其他边之间的比也确定吗? 与同伴进行交流。

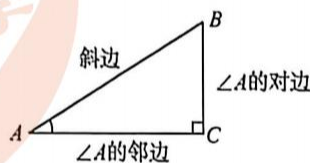


图 1-8

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 如果锐角 A 确定, 那么 $\angle A$ 的对边与斜边的比、邻边与斜边的比也随之确定。

$\angle A$ 的对边与斜边的比叫作 $\angle A$ 的正弦 (sine), 记作 $\sin A$, 即

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}。$$

$\angle A$ 的邻边与斜边的比叫作 $\angle A$ 的余弦 (cosine), 记作 $\cos A$, 即

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}。$$

锐角 A 的正弦、余弦和正切都是 $\angle A$ 的三角函数 (trigonometric function)。当锐角 A 变化时, 相应的正弦、余弦和正切值也随之变化。

思考·交流

在图 1-4 中，梯子的倾斜程度与 $\sin A$ 和 $\cos A$ 有怎样的关系？与同伴进行交流。

$\sin A$ 的值越大，梯子越陡；
 $\cos A$ 的值越小，梯子越陡。

例2 如图 1-9，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $AC=2$ ，求 $\sin A$ ， $\cos A$ 。

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{5}。$$

$$\text{又} \because AC^2 + BC^2 = AB^2，$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}。$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{5}。$$

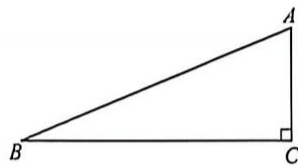


图 1-9

例3 如图 1-10，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $AC=200$ ， $\sin A=0.6$ ，求 BC 的长。

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\because \sin A = \frac{BC}{AC}，$$

$$\text{即} \frac{BC}{200} = 0.6，$$

$$\therefore BC = 200 \times 0.6 = 120。$$

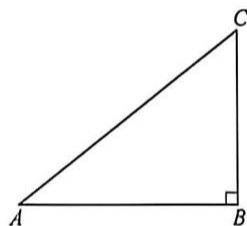


图 1-10

操作·思考

如图 1-11，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ 。

(1) 已知 $\cos A = \frac{12}{13}$ ， $AC=10$ ，求 AB 和 $\sin B$ 。

(2) $\cos A$ 与 $\sin B$ 有怎样的关系？ $\sin A$ 与 $\cos B$ 呢？

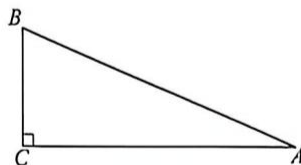
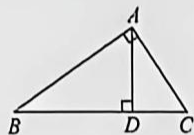


图 1-11

随堂练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=1$, $AB=9$, 求 $\sin A$, $\cos A$ 。
2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\sin A=\frac{4}{5}$, $BC=20$, 求 $\triangle ABC$ 的周长和面积。
3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AD\perp BC$ 于点 D 。若 $AD=6$, $BD=8$, 求 $\sin C$ 。

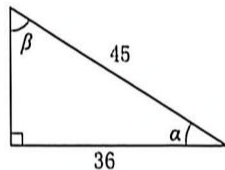


(第3题)

习题 1.1.2

知识技能

1. 如图, 分别求 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 的正弦、余弦和正切。
2. 如何用正弦、余弦、正切来刻画梯子的倾斜程度?



(第1题)



联系拓广

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BCA=90^\circ$, CD 是 AB 边上的中线, $BC=8$, $CD=5$, 求 $\sin\angle ACD$, $\cos\angle ACD$ 和 $\tan\angle ACD$ 。
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC<90^\circ$, $AB=5$, $BC=13$, AD 是 BC 边上的高, $AD=4$, 求 CD 和 $\sin C$ 。如果 $\angle ABC>90^\circ$ 呢?
5. 你能从勾股定理和三角函数的角度来说明两个直角三角形全等所应具备的条件吗?

观察一副三角板（如图1-12），其中有几个锐角？它们分别等于多少度？

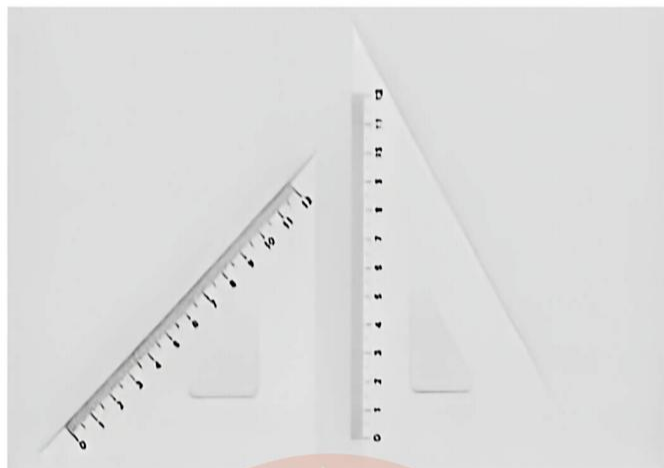


图 1-12

- (1) $\sin 30^\circ$ 等于多少？你是怎样得到的？与同伴进行交流。
 (2) $\cos 30^\circ$ 等于多少？ $\tan 30^\circ$ 呢？

尝试 · 思考

- (1) 60° 角的三角函数值分别是多少？你是怎样得到的？
 (2) 45° 角的三角函数值分别是多少？你是怎样得到的？
 (3) 完成下表，你有什么发现？

$\angle \alpha$	三角函数		
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
30°			
45°			
60°			

例4 计算:

(1) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ$;

(2) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ - \tan 45^\circ$ ①。

解: (1) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$;

$$\begin{aligned}
 (2) \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ - \tan 45^\circ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \\
 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

例5 如图1-13, 一个小孩正在荡秋千。假设秋千链子的长度为2.5 m, 当秋千前后摆动时, 摆过的角度 $\angle BOD$ 恰好为 60° , 且前后摆动的角度相同。求秋千摆至最高位置(点 B, D)时与摆至最低位置(点 A)时的高度之差(结果精确到0.01 m)。



图 1-13

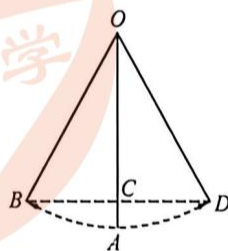


图 1-14

解: 连接 BD , 交 OA 于点 C , 如图1-14。根据题意可知, $\angle AOB = \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$, $OB = 2.5$ m,所以 $OC = OB \cos 30^\circ = 2.5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2.165$ (m)。所以 $AC = OA - OC \approx 2.5 - 2.165 \approx 0.34$ (m)。

所以, 秋千摆至最高位置时与摆至最低位置时的高度差约为 0.34 m。

① $\sin^2 60^\circ$ 表示 $(\sin 60^\circ)^2$, $\cos^2 60^\circ$ 表示 $(\cos 60^\circ)^2$, 其余类推。

操作·思考

如图1-15, 身高为 1.7 m 的小丽用一个锐角为 30° 和 60° 的三角板估测一棵树的高度, 其中 $\angle A = 30^\circ$, 她与树之间的距离为 5 m, 那么这棵树大约有多高 (结果精确到 0.1 m)?

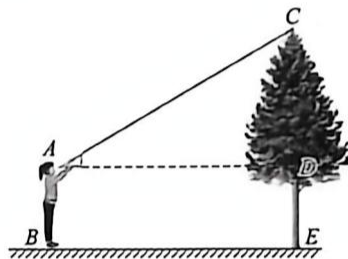


图 1-15

随堂练习

1. 计算:

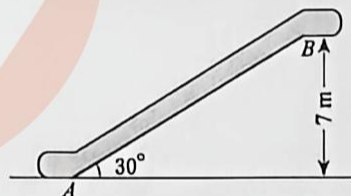
(1) $\sin 60^\circ - \tan 60^\circ$;

(2) $\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$;

(3) $\sqrt{2} \sin 45^\circ + \sin 30^\circ - 2\cos 45^\circ$;

(4) $\tan 30^\circ - \sin 45^\circ + \cos 45^\circ$.

2. 如图, 某商场有一自动扶梯, 其倾斜角为 30° , 高为 7 m, 求该扶梯 AB 的长度。



(第2题)

习题 1.1.3



知识技能

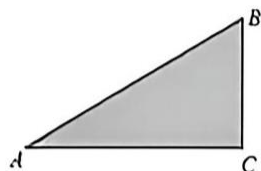
1. 计算:

(1) $\tan 45^\circ - \sin 30^\circ$;

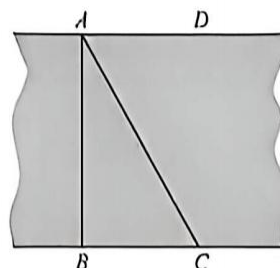
(2) $\cos 60^\circ + \sin 45^\circ - \tan 30^\circ$;

(3) $6\tan^2 30^\circ - \sqrt{3} \sin 60^\circ - 2\cos 45^\circ$.

2. 如图, 一斜坡 AB 的长是 40 m, 其倾斜角为 30° , 求坡顶到地面的高度。



(第2题)

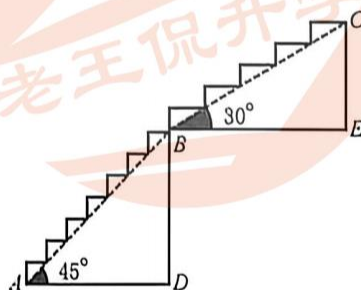


(第3题)

3. 如图, 河岸 AD , BC 互相平行, 桥 AB 垂直于两岸, 桥长 12 m, 在 C 处看桥的两端 A , B , 夹角 $\angle BCA = 60^\circ$, 求 B , C 之间的距离 (结果精确到 1 m)。

问题解决

4. 某阶梯的形状如图所示, 其中线段 $AB = BC$, AB 部分的坡角为 45° , BC 部分的坡角为 30° , $AD = 1.5$ m。如果每个台阶的高不超过 20 cm, 那么这一阶梯至少有多少个台阶 (最后一个台阶的高不足 20 cm 时, 按一个台阶计算) ?



(第4题)

联系拓广

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cos A = \frac{1}{2}$, 求 $\sin A$ 和 $\tan A$, 并与同伴交流你的解法。

如图 1-16, 当登山缆车的吊厢经由点 A 到达点 B 的过程, 它行驶了 200 m。已知缆车行驶的路线与水平面的夹角 $\angle\alpha = 16^\circ$, 那么缆车垂直上升的距离是多少 (结果精确到 0.01 m) ?

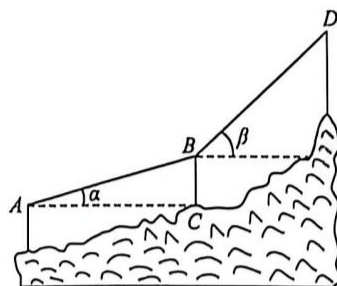


图 1-16

根据题意可知, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = AB \sin 16^\circ$ 。你知道 $\sin 16^\circ$ 是多少吗?

我们可以借助科学计算器求锐角的三角函数值。

怎样用科学计算器求三角函数值呢?

用科学计算器求三角函数值, 要用到 $\sin$ 、 $\cos$ 和 $\tan$ 键。例如, 求 $\sin 16^\circ$, $\cos 42^\circ$, $\tan 85^\circ$ 和 $\sin 72^\circ 38' 25''$ 的按键顺序如下表所示。

	按键顺序	显示结果
$\sin 16^\circ$	$\sin$ 1 6 $=$	0.275 637 355
$\cos 42^\circ$	$\cos$ 4 2 $=$	0.743 144 825
$\tan 85^\circ$	$\tan$ 8 5 $=$	11.430 052 3
$\sin 72^\circ 38' 25''$	$\sin$ 7 2 DMS 3 8 DMS 2 5 DMS $=$	0.954 450 312

对于本节课开头的问题, 利用科学计算器可以求得

$$BC = 200 \sin 16^\circ = 200 \times 0.275 6^{①} \approx 55.13 (\text{m})。$$

① 本书约定, 如无特别说明, 用科学计算器求三角函数值时, 计算结果一般精确到万分位。



观察·思考

在本节开头讨论的缆车行驶情境中,当缆车继续由点 B 到达点 D 时,它又行驶了 200 m,缆车由点 B 到点 D 的行驶路线与水平面的夹角 $\angle\beta = 42^\circ$,由此你还能计算什么?

随堂练习

1. 用计算器求下列各式的值:

(1) $\sin 56^\circ$;

(2) $\sin 15^\circ 49'$;

(3) $\cos 20.72^\circ$;

(4) $\cos 27^\circ 35' 12''$;

(5) $\tan 29.5^\circ$;

(6) $\tan 39^\circ 39' 39''$.

2. 九年级一班同学在一次“重走革命先辈路”的主题教育活动中需要翻越一座小山。他们由山脚先爬坡角为 40° 的山坡 300 m,再爬坡角为 30° 的山坡 100 m 到达山顶,那么这座小山有多高(结果精确到 0.1 m)?

习题 1.1.4



知识技能

1. 用计算器求下列各式的值:

(1) $\tan 32^\circ$;

(2) $\cos 24.53^\circ$;

(3) $\sin 62^\circ 11'$;

(4) $\cos 51^\circ 42' 20''$;

(5) $\sin 56^\circ + \cos 61^\circ + \tan 76^\circ$;

(6) $\sin 81^\circ 32' 17'' + \cos 38^\circ 43' 47''$.

2. 用计算器求下列各式的值(结果精确到 0.01):

(1) $\sin 35^\circ - 3 \tan 25^\circ$;

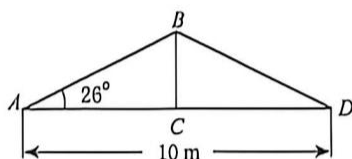
(2) $\frac{\cos 45^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ + \tan 60^\circ}$.





问题解决

3. 一座楼房门前的台阶高出地面 1.2 m，计划拆除台阶，改建成可供轮椅行走的斜坡。根据这个城市的规定，供轮椅行走的斜坡倾斜角不得超过 9° 。从斜坡的起点至楼门的最短水平距离是多少（结果精确到 0.1 m）？
4. 如图，一座厂房屋顶人字架的跨度为 10 m，上弦 $AB=BD$ ， $\angle A=26^\circ$ 。求中柱 BC 和上弦 AB 的长（结果精确到 0.01 m）。



(第4题)



联系拓广

5. 用计算器求出下列三角函数的值，并填入下表：

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\tan \alpha$								

- (1) 当锐角 α 逐渐增大时，它的正弦、余弦和正切的值分别发生怎样的变化？
- (2) 你还能从表中发现什么规律？与同伴进行交流。



如图 1-17, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$.

(1) 若 $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$, 则 $\angle A = \angle D$ 吗?

(2) 若 $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$, 则 $\angle A = \angle D$ 吗?

(3) 若 $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$, 则 $\angle A = \angle D$ 吗?

由此你能得到什么结论?

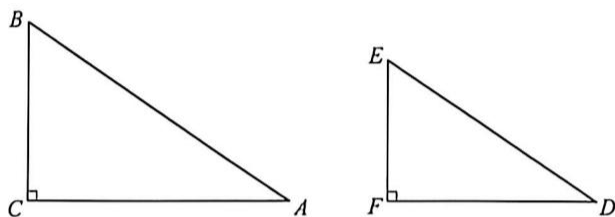


图 1-17

思考·交流

已知锐角 A , 可以求出 $\angle A$ 的三角函数值. 反过来, 已知锐角 A 的三角函数值, 你能求出 $\angle A$ 的度数吗? 与同伴进行交流.

操作·思考

为了方便行人推非机动车过某天桥, 市政府在 10 m 高的天桥两端修建了 40 m 长的斜道 (如图 1-18). 如何求这条斜道的倾斜角呢?

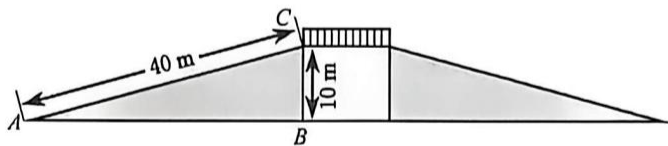


图 1-18

如图 1-18, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$, 那么 $\angle A$ 是多少度呢?

要解决这个问题, 我们可以借助科学计算器.



已知三角函数值求角度，要用到 $\sin$ $\cos$ $\tan$ 键的第二功能 “ $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ ” 和 2ndF 键。

	按键顺序	显示结果
$\sin A = 0.981\ 6$	2ndF $\sin$ 0 $.$ 9 8 1 6 $=$	78.991 840 39
$\cos A = 0.860\ 7$	2ndF $\cos$ 0 $.$ 8 6 0 7 $=$	30.604 730 07
$\tan A = 0.189\ 0$	2ndF $\tan$ 0 $.$ 1 8 9 0 $=$	10.702 657 49
$\tan A = 56.78$	2ndF $\tan$ 5 6 $.$ 7 8 $=$	88.991 020 49

上表的显示结果是以“度”为单位的，再按 DMS 键即可显示以“度、分、秒”为单位的结果。用“度、分、秒”为单位表示角度时，本书中如果没有特别说明，结果一般精确到 $1''$ 。

你能求出图 1-18 中 $\angle A$ 的度数吗？与同伴进行交流。

例6 如图 1-19，工件上有一 V 形槽 ($AC = BC$)，测得它的上口宽度 (AB) 为 20 mm，深度 (CD) 为 19.2 mm，求 V 形角 ($\angle ACB$) 的大小 (结果精确到 1°)。

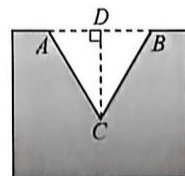


图 1-19

解：根据题意可知， $\tan \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{10}{19.2}$ ，

所以 $\angle ACD \approx 27.5^\circ$ ，

所以 $\angle ACB = 2\angle ACD \approx 2 \times 27.5^\circ = 55^\circ$ 。



例7 如图1-20, 一枚运载火箭从地面C处发射, 已知雷达站B与发射点C之间的水平距离为9.8 km, 当火箭竖直上升至距地面6.3 km的A处时, $\angle ABC$ 的大小为多少?

解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC=6.3$ km, $BC=9.8$ km,

$$\text{所以 } \tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{6.3}{9.8},$$

所以 $\angle ABC \approx 32^\circ 44' 7''$ 。

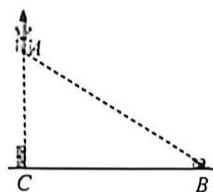


图1-20

随堂练习

1. 根据下列三角函数值求锐角 α 的大小:

(1) $\sin \alpha = 0.8291$;

(2) $\cos \alpha = 0.7857$;

(3) $\tan \alpha = 30$;

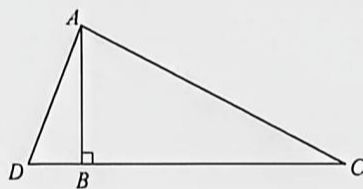
(4) $\tan \alpha = \frac{4}{5}$ 。

2. 一架长4 m的梯子斜靠在墙面上。已知梯子底端距离墙面2.5 m, 求这架梯子与地面所成锐角的度数。

3. 山东寿光是中国的菜篮子, 蔬菜大棚年产蔬菜50亿千克。某蔬菜大棚的结构, 抽象后上半部分如图(2)所示, 铅直竖立的立柱 $AB=4$ m, 棚宽 $CD=12$ m, 其中 $BD=2$ m, 求向阳坡坡角 $\angle C$ 的度数。



(1)



(2)

(第3题)

习题 1.1.5



知识技能

1. 根据下列三角函数值求锐角 α 的大小:

(1) $\tan \alpha = 2.9888$;

(2) $\sin \alpha = 0.3957$;

(3) $\cos \alpha = 0.7850$;



(4) $\tan \alpha = 0.897\ 2$; (5) $\sin \alpha = \frac{5}{6}$; (6) $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ 。

2. 根据下列三角函数值求锐角 β 的大小:

(1) $\sin \beta = \frac{2}{5}$; (2) $\cos \beta = \frac{2}{5}$; (3) $\tan \beta = \frac{2}{5}$ 。



问题解决

3. 一辆汽车沿着一山坡行驶了 1 000 m, 其铅直高度上升了 50 m。求山坡与水平面所成锐角的度数。
4. 在 1: 20 000 的平面地图上, 量得甲、乙两地的直线距离为 1.5 cm, 两地的实际高度相差 27 m, 求甲、乙两地间的坡角。



联系拓广

5. 用计算器求下列正切值对应的锐角 θ , 并填入下表:

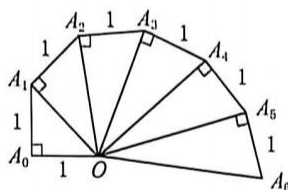
$\tan \theta$	0.5	1	2	3	4	5	10	20	50
θ									

从上面的表格中, 你能发现哪些规律? 与同伴进行交流。

6. 图中的螺旋形是由一系列直角三角形组成的, 其中 $OA_0 = 1$, $A_0A_1 = A_1A_2 = \dots = A_5A_6 = 1$, 每个三角形都以点 O 为一顶点。

(1) 求 $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3$ 的大小;

(2) 已知 $\angle A_{n-1}OA_n$ (n 为正整数) 是第一个小于 20° 的角, 求 n 的值。



(第6题)



2

解直角三角形

黄河是中华民族的母亲河，黄河文化是中华民族的根本和魂。为了传承黄河文化，某学校组织学生到黄河某段开展研学活动，数学兴趣小组在只有米尺和测角仪的情况下，想要求出此段黄河某处的宽度（不能到对岸）。如图 1-21，已知数学兴趣小组在 A 处测得河对岸岸边的一棵树 B 恰好使得 AB 与河岸垂直，沿着河岸前进 560 m 到达 C 处，此时测得 $\angle ACB = 55^\circ$ 。求河的宽度（结果精确到 1 m）。

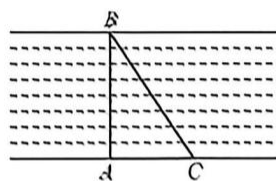


图 1-21

在生产实际和科学研究中，经常要求出线段的长度或角的大小，这类问题有些可以归结为求一个直角三角形的边长或锐角的大小。

尝试·思考

一般地，三角形的三个角 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 和它们的对边 a ， b ， c 叫作三角形的元素。

如图 1-22，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，有三条边 a ， b ， c （本章中，将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 三个内角 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 所对的边分别记为 a ， b ， c ）和三个角 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 。除 $\angle C = 90^\circ$ 外，其余五个元素之间有哪些等量关系？至少知道几个元素，就可以求出其他的元素？

如图 1-22，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C$ 为直角，可得下列边角关系：

- (1) 锐角之间的关系： $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ；
- (2) 三边之间的关系： $a^2 + b^2 = c^2$ ；
- (3) 角与边之间的关系：

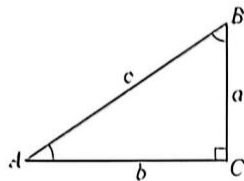


图 1-22

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \sin B = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}, \quad \tan B = \frac{b}{a}.$$



利用上面这些关系，如果知道直角三角形中的两个元素（其中至少一个是边），就可以求出其他元素。由直角三角形中已知的元素，求出其他所有未知元素的过程，叫作解直角三角形。

例1 如图1-23，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ， $a=4$ ， $c=8$ 。解这个直角三角形。

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\because a^2 + b^2 = c^2, \quad a=4, \quad c=8,$$

$$\therefore b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}。$$

$$\because \sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ。$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ。$$

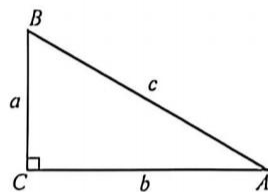


图 1-23

例2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ， $a=35$ ， $b=28$ ，求 $\angle A$ ， $\angle B$ 的度数（结果精确到 1° ）和 c 的长（结果精确到1）。

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\because a^2 + b^2 = c^2, \quad a=35, \quad b=28,$$

$$\therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{35^2 + 28^2} = \sqrt{2\,009} \approx 45。$$

$$\because \tan A = \frac{a}{b} = \frac{35}{28} = 1.25,$$

$$\therefore \angle A \approx 51^\circ。$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A \approx 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ。$$

思考·交流

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ 。

(1) 已知 a ， b ，怎样求 $\angle A$ 的度数？

(2) 已知 a ， c ，怎样求 $\angle A$ 的度数？

(3) 已知 b ， c ，怎样求 $\angle A$ 的度数？

由此你能总结一下已知两条边解直角三角形的方法吗？与同伴进行交流。



随堂练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$.

(1) 已知 $a=5$, $b=5\sqrt{3}$, 求 c 的长和 $\angle A$, $\angle B$ 的度数;

(2) 已知 $c=26$, $b=24$, 求 a 的长和 $\angle B$ 的度数 (结果精确到 $1'$).

习题 1.2.1



知识技能

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $b=6$, $c=8$, 解这个直角三角形.

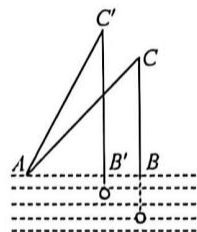
2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $a=\sqrt{15}$, $b=\sqrt{5}$, 解这个直角三角形.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $a=13.5$, $c=9\sqrt{3}$, 解这个直角三角形.



问题解决

4. 如图, 钓竿、鱼线可以近似地看作线段. 已知钓竿 AC 长 6 m, 露在水面上的鱼线 BC 长 $3\sqrt{2}$ m. 某钓者想看看鱼上钩的情况, 把钓竿 AC 转动到 AC' 的位置, 此时露在水面上的鱼线 $B'C'$ 长 $3\sqrt{3}$ m, 则钓竿转过的角度是多少?



(第4题)

例3 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $c=128$, $\angle B=60^\circ$, 解这个直角三角形.

解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

$$\because \cos B = \frac{a}{c}, \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\therefore a = c \cdot \cos B = 128 \cos 60^\circ = 128 \times \frac{1}{2} = 64,$$

$$b = c \cdot \sin B = 128 \sin 60^\circ = 128 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 64\sqrt{3}.$$



例4 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $a=15$, $\angle A=35^\circ 27'$, 求 $\angle B$ 的度数和 b, c 的长(结果精确到1)。

解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\angle B=90^\circ-\angle A=90^\circ-35^\circ 27'=54^\circ 33'.$$

$$\therefore \tan B=\frac{b}{a}, \sin A=\frac{a}{c},$$

$$\therefore b=a \cdot \tan B=15 \tan 54^\circ 33' \approx 21,$$

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{15}{\sin 35^\circ 27'} \approx 26.$$

思考·交流

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$ 。

(1) 已知 $c, \angle A$, 写出求 a 和 b 的式子;

(2) 已知 $b, \angle A$, 写出求 a 和 c 的式子;

(3) 已知 $a, \angle A$, 写出求 b 和 c 的式子。

由此你能总结一下已知一条边和一个锐角解直角三角形的方法吗? 与同伴进行交流。

随堂练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$ 。

(1) 已知 $c=15, \angle B=60^\circ$, 求 a 的长;

(2) 已知 $b=24, \angle A=45^\circ$, 求 c 的长。

习题 1.2.2



知识技能

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$ 。

(1) 已知 $c=15, \angle B=36^\circ$, 求 $\angle A$ 的度数和 a, b 的长(结果精确到1);

(2) 已知 $a=24$, $\angle A=80^\circ$, 求 $\angle B$ 的度数和 b, c 的长 (结果精确到1)。

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 根据下列条件解直角三角形:

(1) $\angle A=30^\circ$, $b=5$;

(2) $\angle A=14^\circ$, $c=1\ 200$ (结果精确到1)。



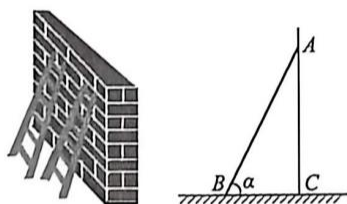
问题解决

3. 要想使施工人员安全地爬上斜靠在墙上的梯子的顶端, 梯子与地面所成的锐角 $\angle \alpha$ 一般要满足 $50^\circ \leq \angle \alpha \leq 75^\circ$ 。

(1) 在安全使用的条件下, 一架长 6 m 的梯子的顶端能抵达的最大高度是多少 (结果精确到 0.1 m)?

(2) 在安全使用的条件下, (1) 中梯子的底端到墙面的距离可以是 2.4 m 吗? 为什么?

(3) 根据此情境, 你还能提出其他问题吗?



(第3题)

例5 如图 1-24, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$, $AC=12$, 求 AB 的长。

解: 过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D 。

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AC=12$, $\angle A=60^\circ$,

$$\therefore CD = AC \cdot \sin A = 12 \sin 60^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$$AD = AC \cdot \cos A = 12 \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6.$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\angle B=45^\circ$,

$$\therefore BD = \frac{CD}{\tan B} = \frac{6\sqrt{3}}{\tan 45^\circ} = 6\sqrt{3}.$$

$$\therefore AB = AD + BD = 6 + 6\sqrt{3}.$$

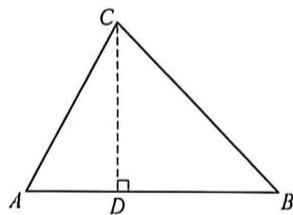


图 1-24

例6 如图1-25, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=47^\circ$, $\angle ACB=15^\circ$, $AC=6$, 求 AB 的长 (结果精确到0.01)。

解: 过点 C 作 $CD \perp AB$, 交 BA 的延长线于点 D 。

$$\because \angle B=47^\circ, \angle ACB=15^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle B + \angle ACB = 47^\circ + 15^\circ = 62^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AC=6$, $\angle CAD=62^\circ$,

$$\therefore AD = AC \cdot \cos \angle CAD = 6 \cos 62^\circ \approx 2.817,$$

$$CD = AC \cdot \sin \angle CAD = 6 \sin 62^\circ \approx 5.298.$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\angle B=47^\circ$,

$$\therefore BD = \frac{CD}{\tan B} \approx \frac{5.298}{\tan 47^\circ} \approx 4.940.$$

$$\therefore AB = BD - AD \approx 4.940 - 2.817 \approx 2.12.$$

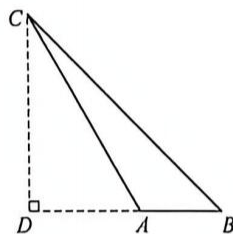


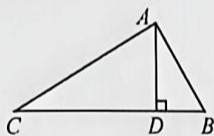
图 1-25

思考·交流

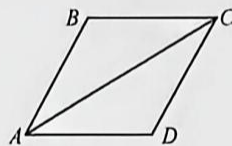
- (1) 对于例6, 是否还有其他作辅助线的方法?
- (2) 在例5和例6的解答过程中, 如何把问题转化为解直角三角形问题? 与同伴进行交流。

随堂练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=8$, 求 $\sin B$, $\cos B$ 的值。
2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, $\angle B=60^\circ$, $AC=5$, $AD=3$, 求 BC 的长。



(第2题)



(第3题)

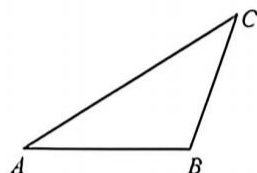
3. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle BAD=60^\circ$, $AB=6$, $AC=6\sqrt{3}$, 求 $\square ABCD$ 的面积。

习题 1.2.3



知识技能

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10$, $\angle A=120^\circ$, 求这个三角形的周长。
2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=108^\circ$, $AB=6$, $BC=5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积(结果精确到0.01)。

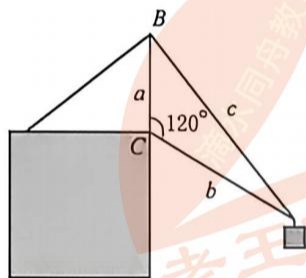


(第2题)

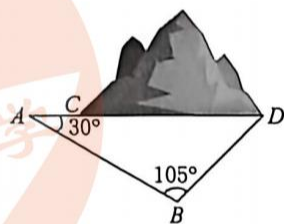


问题解决

3. 一个简易的起重装置如图所示, 其中 $a=12$ m, $b=22$ m, a 和 b 的夹角是 120° , 求 c 的长(结果精确到0.1 m)。



(第3题)



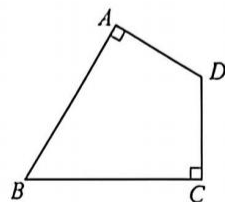
(第4题)

4. 如图, 在修建某高速公路时, 线路需要经过一座小山, 施工方计划从小山的一侧 C 处沿 AC 方向开挖隧道到小山的另一侧 D 处(A, C, D 三点在同一条直线上)。为了计算隧道 CD 的长, 现另取一点 B , 测得 $\angle CAB=30^\circ$, $\angle ABD=105^\circ$, $AC=1$ km, $AB=4$ km, 求隧道 CD 的长(结果保留根号)。



联系拓广

5. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC=120^\circ$, $AB \perp AD$, $BC \perp CD$, $AB=5\sqrt{3}$, $CD=3\sqrt{3}$, 求四边形 $ABCD$ 的面积。



(第5题)

3

三角函数的应用

如图 1-26，当从低处观测高处的目标时，视线与水平线所成的锐角称为仰角（angle of elevation）。当从高处观测低处的目标时，视线与水平线所成的锐角称为俯角（angle of depression）。

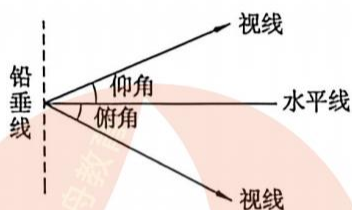


图 1-26

尝试·思考

如图 1-27，小明想测量塔 AB 的高度。他在 C 处用高为 1 m 的测倾器 CE 测得塔顶 A 的仰角为 30° ，再朝塔的方向前进 50 m 至 D 处，测得塔顶 A 的仰角为 60° 。请你帮他计算一下这座塔的高度（结果精确到 0.1 m）。

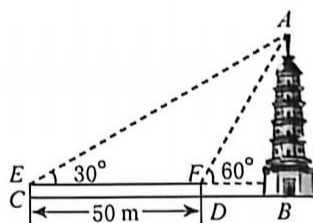


图 1-27

思考·交流

如图 1-28，海中有一个小岛 A ，该岛四周 10 n mile 内有暗礁。一艘货轮由西向东航行，开始在 A 岛南偏西 55° 的 B 处，向东行驶 20 n mile 后到达该岛的南偏西 25° 的 C 处。之后，货轮继续向东航行。

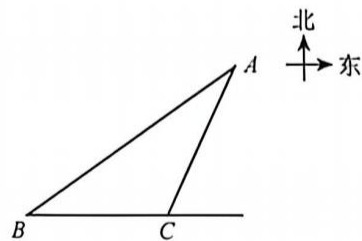


图 1-28

你认为货轮继续向东航行途中会有触礁的危险吗？你是怎样想的？与同伴进行交流。

操作·思考

如图 1-29，某博物馆准备改善原有楼梯的安全性能，把倾斜角由 40° 减至 35° ，已知原有楼梯的长度为 4 m，调整后的楼梯应加长多少？楼梯多占多长一段地面（结果精确到 0.01 m）？与同伴交流你的思考过程。



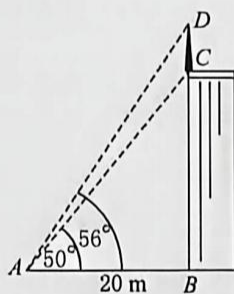
图 1-29

回顾·反思

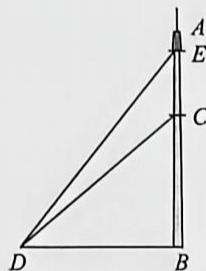
利用解直角三角形解决实际问题的一般步骤是什么？

随堂练习

1. 求图中避雷针 CD 的长度（结果精确到 0.01 m）。



（第1题）



（第2题）

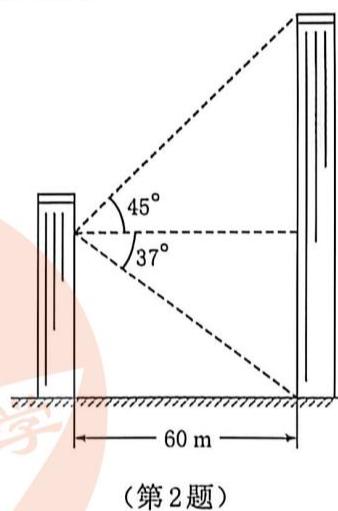
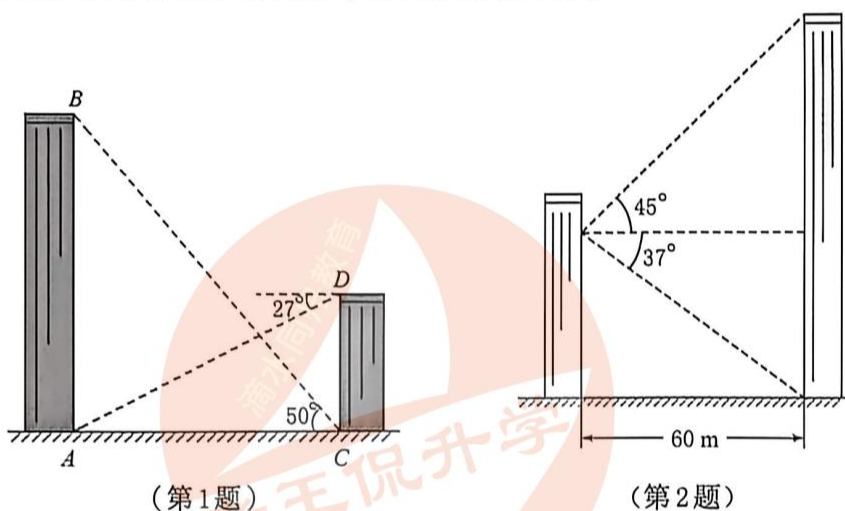
2. 一座信号塔的示意图如图所示。信号塔 AB 被钢缆 CD 固定， CD 与地面成 40° 角，且 $DB = 50$ m。在 C 点上方 20 m 处加固另一条钢缆 ED ，那么钢缆 ED 的长度为多少（结果精确到 0.1 m）？

习题 1.3.1

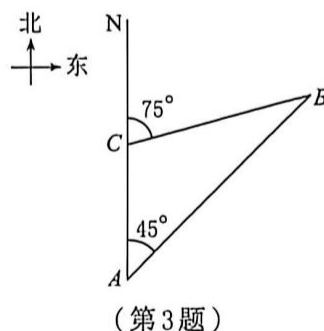


问题解决

1. 如图，在宿舍楼的 C, D 两点处观测与地面垂直的建筑物 AB ，从点 D 观测点 A 的俯角是 27° ，从点 C 观测点 B 的仰角是 50° ，已知宿舍楼 CD 的高度是 20 m 。求建筑物 AB 的高度（结果精确到 1 m ）。



2. 如图，物华大厦离小伟家 60 m ，小伟从自家的窗中眺望大厦，观测大厦顶部时，测得仰角是 45° ，观测大厦底部时，测得俯角是 37° ，求该大厦的高度（结果精确到 0.1 m ）。
3. 如图，一艘货轮以 36 n mile/h 的速度在海面上航行，当它行驶到 A 处时，发现它的东北方向有一灯塔 B 。货轮继续向北航行 40 min 后到达 C 处，发现灯塔 B 在它北偏东 75° 方向。根据这一情境你能提出怎样的问题？选择一个问题加以解答。



尝试·思考

如图1-30, 水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$, 其中 $CD \parallel AB$, 坝顶 $DC=6$ m, 坝高22 m, 斜坡 AD 的坡比为1:3, 斜坡 BC 的坡比为1:2.5。求斜坡 AD 的坡角 α (结果精确到 $1'$)、坝底宽 AB 和斜坡 AD 的长 (结果精确到0.1 m)。

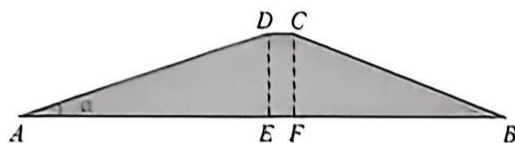


图 1-30

思考·交流

如图1-31, 某新建楼房后面紧邻着一个山坡, 坡上面是一块平地。 $BC \parallel AD$, $BE \perp AD$, 斜坡 AB 长26 m, 坡角 $\angle BAD=68^\circ$ 。为防止山体滑坡, 需要对该斜坡进行改造。经地质人员勘测, 当坡角不超过 50° 时, 可确保山体不滑坡。

如果改造时保持坡脚 A 不动, 坡顶 B 沿 BC 左移11 m到 F 点处, 这样改造能确保山体不滑坡吗? 与同伴进行交流。

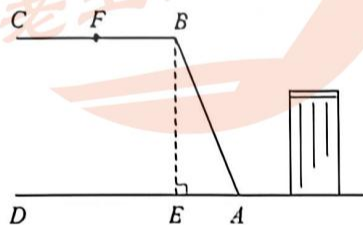
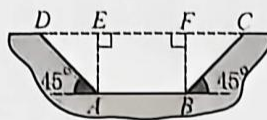


图 1-31

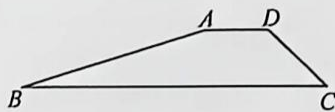
随堂练习

- 如图, 一段长1 500 m的水渠, 其横断面为梯形 $ABCD$, 其中 $AB \parallel CD$, $AD=BC$, 渠深 $AE=0.8$ m, 底 $AB=1.2$ m, 坡角为 45° , 那么该段水渠最多能蓄水多少立方米?



(第1题)

2. 如图, 水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$, 其中 $AD \parallel BC$, 坝顶 $AD = 6 \text{ m}$, 斜坡 $CD = 8 \text{ m}$, 坝底 $BC = 30 \text{ m}$, $\angle ADC = 135^\circ$.



(第2题)

- (1) 求 $\angle ABC$ 的度数 (结果精确到 1°);
 (2) 如果坝长为 100 m , 那么建筑这个大坝共需多少土石料 (结果精确到 0.01 m^3)?

阅读·思考

三角学的发展

“三角学”(trigonometry)一词源于希腊文的“三角形”与“测量”,原意是“三角形的测量”。后来,人们把利用三角函数研究三角形和其他图形的数量关系,进而研究三角函数的性质及其应用的数学学科称为三角学。

三角学的发展大致可分为三个时期。从远古至11世纪前为第一个时期。在此期间,虽然人们还没有明确提到三角形的边与角之间的数量关系,更没有角的函数的概念,但是人们已经能够利用当时掌握的数学知识解决属于三角学范围内的一些实际问题。

11—18世纪是三角学发展的第二个时期。这一时期,由于测量、贸易和航海等方面的需要,三角学得到了迅速发展,并逐渐形成一门独立的数学学科。在此期间,人们编制出大量的三角函数表,三角函数得到广泛应用。

第三个时期是18世纪以后,这时三角学的研究逐步演变为研究三角函数的性质及其应用,而且引进了现在所使用的三角函数符号。

三角学传入我国,开始于明崇祯年间,《大测》和《测量全义》最早介绍了西方三角学。其中,《大测》由德国人邓玉函(Johann Schreck, 1576—1630)译撰,这是我国第一部三角学著作;《测量全义》由意大利人罗雅谷(Giacomo Rho, 1593—1638)译撰、德国人汤若望(Johann Adam Schall von Bell, 1591—1666)订。当时是用线段长(八线)来规定各个三角函数的意义,“八线”就是与一个角有关的八条线段,分别称为正弦、余弦、正切、余切、正割、余割、正矢、余矢。1877年华蘅芳(1833—1902)与英国人傅兰

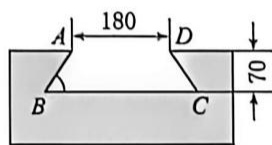
雅 (J. Fryer, 1839—1928) 合译英国人海麻士 (I. Hymers, 1803—1877) 的《三角数理》，这是三角学第二次传入我国。

习题 1.3.2



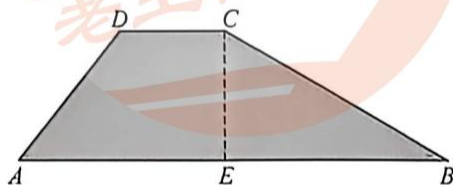
问题解决

1. 榫卯结构是一种我国传统木建筑和家具的主要结构方式，是在两个构件上采用凹凸部位相结合的一种连接方式。如图，在某燕尾榫中，榫槽的横断面 $ABCD$ 是



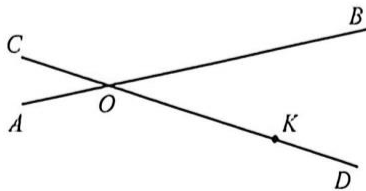
(第1题)

- 梯形，其中 $AD \parallel BC$, $AB = DC$, 燕尾角 $\angle B = 55^\circ$, 外口宽 $AD = 180$ mm, 榫槽深度是 70 mm, 求它的里口宽 BC (结果精确到 1 mm)。
2. 如图，水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$, 其中 $CD \parallel AB$, 迎水坡 BC 的倾斜角 $\angle B = 30^\circ$, 背水坡 AD 的坡比为 1.2 : 1, 坝顶 $DC = 5$ m, 坝高 $CE = 6$ m. 求 BC 和 AB 的长 (结果精确到 0.1 m)。



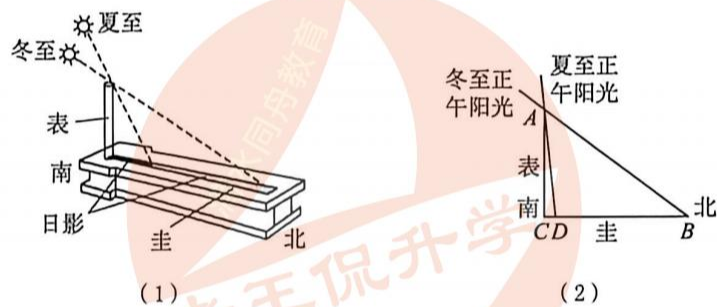
(第2题)

3. 如图，铁路 AB 和公路 CD 在点 O 处交会， $\angle BOD = 30^\circ$, 公路 CD 上 K 处距离 O 点 240 m. 如果火车行驶时，周围 200 m 以内会受到噪声影响。若火车在铁路 AB 上沿由 A 到 B 的方向以 72 km/h 的速度行驶，请分析 K 处是否受噪声影响？如果受影响，请求出 K 处受噪声影响的时间。



(第3题)

4. 图(1)是一种古老的测量日影长短的工具——圭(guī)表,出自《周礼·地官·大司徒》,它构造简单,由一根直立在平面上的标杆(称为“表”)和一把呈南北方向水平固定摆放的与标杆垂直的长尺(称为“圭”)组成,通过观察记录正午时影子的长短变化来确定季节的变化。当正午太阳照射在表上时,日影便会投影在圭面上,圭面上日影长度最长的那一天定为冬至,日影长度最短的那一天定为夏至。图(2)是一个根据某市地理位置设计的圭表平面示意图,表 AC 垂直于圭 BC ,已知该市冬至正午太阳高度角(即 $\angle ABC$)为 37° ,夏至正午太阳高度角(即 $\angle ADC$)为 84° ,圭面上冬至线与夏至线之间的距离(即 DB 的长)为4 m。



(第4题)

- (1) 求 $\angle BAD$ 的度数;
- (2) 求表 AC 的长(结果精确到0.1 m)。



★ 问题解决活动：利用三角函数测高

问题 我们曾经测量过学校旗杆的高度。当在地面上不能直接测得测点与被测旗杆的底部之间的距离时（这种情况称为“底部不可以到达”），你能利用三角函数的有关知识测量旗杆的高度吗？

选择一个底部不可以到达的物体，测量它的高度。

理解问题

- （1）“底部不可以到达”会给测量物体的高度带来哪些困难？
- （2）如何利用三角函数的有关知识克服这些困难？

拟订计划

- （1）小组合作，讨论各种测量方案及其可行性。
- （2）每种测量方案分别需要用到哪些工具？需要测量哪些量？画出测量示意图，写出被测物体高度的表达式。

实施计划

- （1）各小组进行实地测量，做好数据记录。
- （2）梳理测量过程并撰写活动报告。

回顾反思

- （1）你们在实地测量过程中遇到了哪些困难？是如何克服的？
- （2）各小组汇报展示活动成果，共同讨论减少测量误差的策略。



附：活动报告

年 月 日

课题名称				
测量示意图				
测量数据	测量项目	第一次	第二次	平均值
计算过程				
活动感受				
参加人员				
计算者及复核者				
指导教师审核意见				
备注				

习题

1. 如果一个物体的高度已知或容易测量，那么如何利用三角函数的有关知识测量某测点到该物体的水平距离？
2. 到目前为止，你有哪些测量物体高度的方法？请举例说明各种方法的特点，并整理成一篇小短文。



回顾与思考



1. 举例说明锐角三角函数在现实生活中的应用。
2. 已知一个锐角，如何用计算器求它的三角函数值？已知一个锐角的三角函数值，如何用计算器求这个锐角？
3. 用具体例子说明如何解直角三角形。
4. 如何测量一座楼的高度？你能想出几种方法？
5. 本章对直角三角形的边角关系进行了哪些研究？
6. 梳理本章内容，用适当的方式呈现全章知识结构，并与同伴进行交流。

复习题

知识技能

1. 计算：

- (1) $\sin 45^\circ - \cos 30^\circ + \tan 60^\circ$;
- (2) $\sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \cos 30^\circ$;
- (3) $\cos 60^\circ - \tan 30^\circ + \sin 30^\circ$;
- (4) $\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ - \tan 45^\circ$.

2. 用计算器求下列各式的值：

- (1) $\sin 23^\circ 5' + \cos 66^\circ 55'$;
- (2) $\cos 14^\circ 28' - \tan 42^\circ 57'$;
- (3) $\tan 52^\circ 39' - \sin 61^\circ 42'$;
- (4) $\sin^2 7.8^\circ - \cos 65^\circ 37' + \tan 49^\circ 56''$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的对边分别为 a ， b ， c 。

- (1) 已知 $a=3$ ， $b=3$ ，求 $\angle A$ ；
- (2) 已知 $b=4$ ， $c=8$ ，求 a 及 $\angle A$ ；



(3) 已知 $\angle A = 45^\circ$, $c = 8$, 求 a 及 b ;

(4) 已知 $a = 22.5$, $b = 12$, 求 $\angle A$ 及 $\angle B$ 的度数 (结果精确到 $1'$)。

4. 已知 $\angle A$ 是锐角, $\cos A = \frac{3}{5}$, 求 $\sin A$, $\tan A$ 。

5. 根据下列三角函数值, 求锐角的大小:

(1) $\sin A = 0.675$, 求 $\angle A$;

(2) $\cos B = 0.0789$, 求 $\angle B$;

(3) $\tan C = 35.6$, 求 $\angle C$ 。

6. 计算:

(1) $\frac{\cos 30^\circ - \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 45^\circ}$;

(2) $\sin^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \tan 60^\circ + \cos^2 30^\circ$;

(3) $\sqrt{1 - 2 \tan 60^\circ + \tan^2 60^\circ} - \tan 60^\circ$ 。

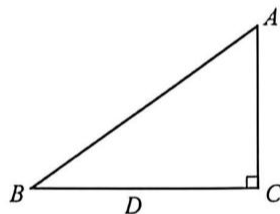
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 4$, 求 AC , BC , $\sin A$ 和 $\cos A$ 。

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$ 。

(1) 在 BC 边上取一点 D , 使得 $BD = DC$,
则 $\tan \angle ABC$ 和 $\tan \angle ADC$ 的大小有什么
关系?

(2) 在 BC 边上取一点 D , 使得 $BD = 2DC$,
则 $\tan \angle ABC$ 和 $\tan \angle ADC$ 的大小有什么关系?

(3) 在 BC 边上取一点 D , 使得 $BD = nDC$ ($n > 0$), 则 $\tan \angle ABC$ 和 $\tan \angle ADC$
的大小有什么关系?

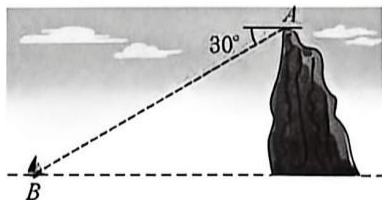


(第8题)



问题解决

9. 如图, 在高出海平面 100 m 的悬崖顶 A 处,
观测海面上的一艘小船 B , 并测得俯角为
 30° , 求船与观测者之间的水平距离 (结果精
确到 0.1 m)。



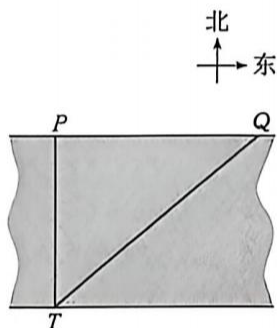
(第9题)



10. 一艘船由 A 港沿北偏东 60° 方向航行 10 km 至 B 港, 然后再沿北偏西 30° 方向航行 10 km 至 C 港。

- (1) 求 A, C 两港之间的距离 (结果精确到 0.1 km);
 (2) 确定 C 港在 A 港的什么方向。

11. 如图, 为了测量一条河的宽度, 测量员在这条河的一侧岸边相距 180 m 的 P 和 Q 两处分别测定对岸一棵树 T 的位置, T 在 P 的正南方向, 在 Q 的南偏西 50° 的方向, 求这条河的宽度 (结果精确到 1 m)。

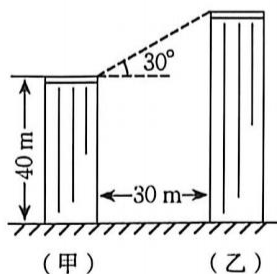


(第11题)

12. (1) 一根长 4 m 的竹竿斜靠在墙上。如果竹竿与地面成 60° 角, 那么它的底端到墙面的距离是多少?

- (2) 如果 (1) 中竹竿的顶端顺着墙面下滑到高度 2.3 m 处停止, 那么此时这根竹竿与地面所成锐角的度数是多少?

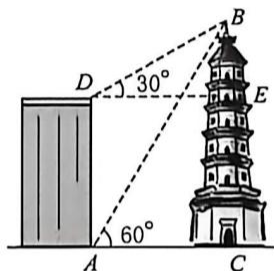
13. 如图, 甲、乙两楼相距 30 m, 甲楼高 40 m, 在甲楼楼顶看乙楼楼顶, 仰角为 30° , 乙楼有多高 (结果精确到 1 m)?



(第13题)



14. 如图, 大楼的高 $AD = 30$ m, 塔高为 BC , 某人在楼底 A 处观测塔顶, 测得仰角为 60° , 爬到楼顶 D 观测塔顶, 测得仰角为 30° , 求塔高 BC 及大楼与塔之间的距离 AC (结果精确到 0.01 m)。



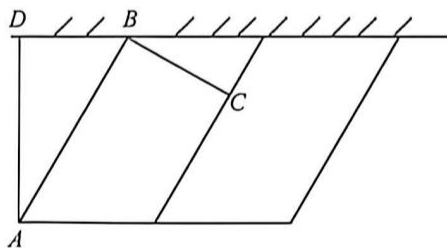
(第14题)

15. 海岛 A 的周围 8 n mile 内有暗礁, 渔船跟踪鱼群由西向东航行, 在点 B 处测得海岛 A 位于北偏东 60° 方向, 航行 12 n mile 后到达点 C 处, 又测得海岛 A 位于北偏东 30° 方向。如果渔船不改变航向继续向东航行, 那么它有没有触礁的危险?



联系拓广

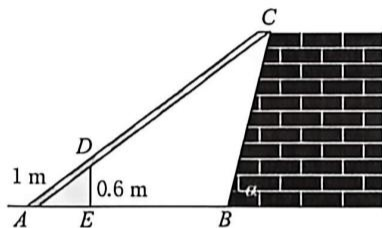
16. 倾斜式停车位划线有三种方法: 30° 角倾斜、 45° 角倾斜、 60° 角倾斜。如果 60° 角倾斜式停车位的斜线 AB 的长度为 6 m, 两斜线间的距离 BC 为 2.5 m。
- (1) 这样的倾斜式停车位占用道路的宽度 AD 为多少?
- (2) 工人师傅在道路上划线时, 要间隔多远的距离?



(第16题)

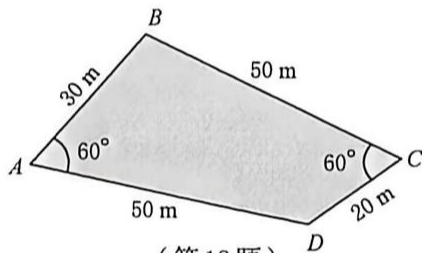


- ※17. 如图, 为了测量山坡的护坡石坝与地面的倾斜角 $\angle\alpha$, 把一根长为 4.5 m 的竹竿 AC 斜靠在石坝旁, 在竹竿上距离 A 点 1 m 处的 D 点离地面的高度 DE 为 0.6 m, 又量得竿顶与坝脚的距离 $BC=2.8$ m, 这样 $\angle\alpha$ 就可以计算出来了。请你算一算。



(第17题)

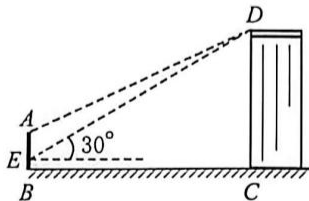
- ※18. 一块四边形空地如图所示, 求此空地的面积 (结果精确到 0.01 m^2)。



(第18题)

- ※19. 如图, 某中学计划在主楼的顶部 D 和大门的上方 A 之间挂一些彩旗。经测量, 得到大门的高度 $AB=5$ m, 大门与主楼之间的距离 $BC=30$ m。在大门处观测主楼顶部, 测得仰角是 30° , 而当时测倾器距离地面的高度 $EB=1.4$ m。

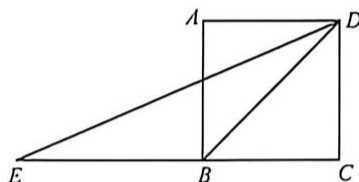
- (1) 求主楼的高度 (结果精确到 0.1 m);
- (2) 求大门顶部与主楼顶部之间的距离 (结果精确到 1 m)。



(第19题)



20. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 延长边 CB 到点 E , 使 $BE = BD$, 连接 DE , $\angle CDE$ 的度数是多少?
试利用这个图形求 $\tan 67.5^\circ$ 的值。



(第20题)

21. 把一根长 1.35 m 的铁丝弯成一个顶角为 150° 的等腰三角形, 求这个三角形各边的长 (结果精确到 0.01 m)。
22. 初中阶段我们已经学过利用全等、相似和三角函数的方法测距离 (高度), 请你通过实例来分析这三种方法的特点, 写一篇小短文。



第二章

二次函数

节日的喷泉给人们带来喜庆，夏日的喷泉给人们带来清凉。你是否注意到喷泉水流所经过的路线？在观看篮球比赛时，你是否注意到篮球入篮的路线？它们会与某种函数有联系吗？

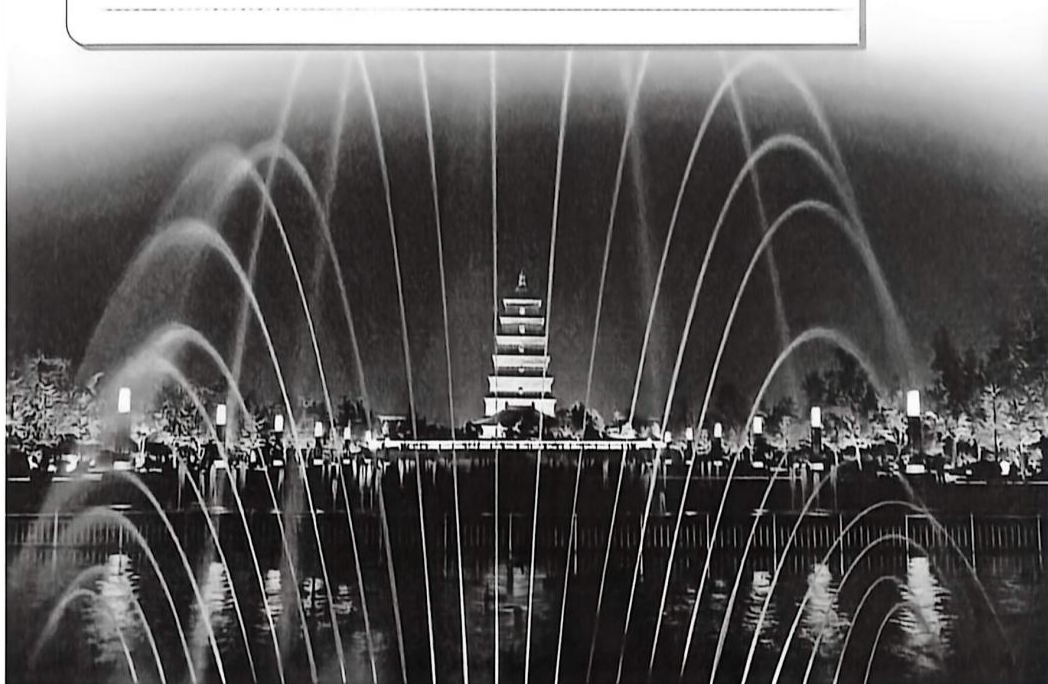
本章将在一次函数的基础上继续认识二次函数，你将体会二次函数的意义，描绘二次函数的图象，发现二次函数的性质，利用二次函数解决一些实际问题，进一步发展抽象能力、几何直观、模型观念等，不断增强应用意识。



在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：

◎ 二次函数所刻画变量之间的关系具有怎样的特征？

◎ 研究函数一般会经历怎样的过程？研究二次函数的方法有哪些特点？



1

对函数的再认识

你还记得什么是函数吗？你能举出几个函数的例子吗？

尝试·思考

(1) A, B 两地之间的路程为 900 km，一辆汽车从 A 地到 B 地所需时间 t (单位: h) 与汽车的平均速度 v (单位: km/h) 之间的表达式是

$$t = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 如图 2-1，矩形 $ABCD$ 的面积为 18 cm^2 ，其中一边 BC 长为 $a \text{ cm}$ ，矩形 $ABCD$ 的周长 l (单位: cm) 与 a (单位: cm) 之间的表达式是

$$l = \underline{\hspace{2cm}}.$$

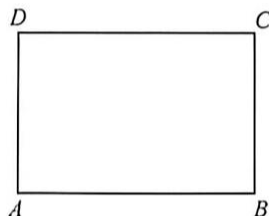


图 2-1

(3) 某种书的定价为 8 元，如果购买 10 本以上，超过 10 本的部分打八折。

① 购买该种书 6 本需付款 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元；

② 购买该种书 14 本需付款 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元；

③ 付款金额 y (单位: 元) 与购买该种书的本数 x (单位: 本) 之间的表达式是

$$y = \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}}, \\ \underline{\hspace{2cm}}. \end{cases}$$

思考·交流

在上面的三个例子中：

(1) 自变量分别是什么？自变量可以取值的范围是什么？

(2) 对于自变量在它可以取值的范围内的每一个值，另一个变量是否都有唯一确定的值与它对应？

(3) 由此你对函数有了哪些进一步的认识? 与同伴进行交流。

一般地, 如果在一个变化过程中有两个变量 x 和 y , 并且对于变量 x 的每一个值, 变量 y 都有唯一确定的值与它对应, 那么我们称 y 是 x 的函数, 其中 x 是自变量, y 是因变量。

例1 如图 2-2, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 为 AD 边上一点 (不与 A, D 重合), 设 $AP=x$, 四边形 $BCDP$ 的面积为 y , 求 y 与 x 之间的函数表达式, 并指出 x 的取值范围。

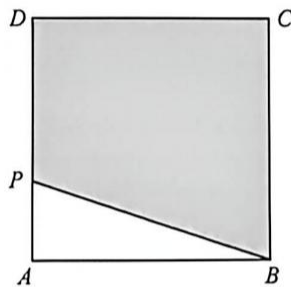


图 2-2

解: 因为 $AP=x$, $AB=2$,
所以 $\triangle APB$ 的面积 $S_1 = x$, 正方形 $ABCD$ 的面积 $S = 4$ 。

所以四边形 $BCDP$ 的面积

$$y = S - S_1 = 4 - x。$$

所以, y 与 x 之间的函数表达式为 $y = 4 - x$ 。

由于点 P 在 AD 边上, 因此, $0 < x < 2$ 。

例2 当 $x=3$ 时, 求下列各函数 y 的对应值:

$$(1) y = 3x + 7; \quad (2) y = -2x^2 - 1;$$

$$(3) y = \frac{1}{5x+2}; \quad (4) y = \sqrt{x-3}。$$

解: (1) 当 $x=3$ 时, $y = 3 \times 3 + 7 = 16$;

(2) 当 $x=3$ 时, $y = -2 \times 3^2 - 1 = -19$;

(3) 当 $x=3$ 时, $y = \frac{1}{5 \times 3 + 2} = \frac{1}{17}$;

(4) 当 $x=3$ 时, $y = \sqrt{3-3} = 0$ 。

对于自变量在可取值范围内的一个确定的值 a ，函数有唯一确定的对应值，这个对应值称为当自变量等于 a 时的函数值。如对于例 2 (1) 中的函数 $y=3x+7$ ，16 就是当 $x=3$ 时的函数值。

随堂练习

1. 某汽车油箱内现有汽油 50 L，若这辆汽车每行驶 100 km 的耗油量为 6 L，试写出汽车油箱中剩余油量 y (单位：L) 与汽车行驶的路程 x (单位：km) 之间的函数表达式。

2. 当 $x=-3, \frac{1}{2}$ 时，求下列函数的函数值：

$$(1) y = \frac{1}{2}x^2 + x - 3;$$

$$(2) y = \sqrt{-4x+8};$$

$$(3) y = \frac{x-3}{x+1};$$

$$(4) y = \sqrt{\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}}.$$

习题 2.1.1



知识技能

1. 一个等腰三角形的周长为 10 cm，求它的一腰长 y (单位：cm) 与底边长 x (单位：cm) 之间的函数表达式。
2. 当 x 为何值时，下列函数的函数值为 0？
 - (1) $y=2x+3$;
 - (2) $y=2x^2-x-6$ 。



问题解决

3. 一根蜡烛长 20 cm，点燃后每小时燃烧 5 cm。
 - (1) 写出蜡烛剩余长度 y (单位：cm) 与点燃时间 x (单位：h) 之间的函数表达式；
 - (2) 写出自变量 x 的取值范围；
 - (3) 蜡烛点燃 2 h 后还剩多长？



联系拓广

4. 当下列函数的函数值为正数时, 请分别求出 x 的取值范围。

(1) $y = 1 - 2x$;

(2) $y = \frac{1}{2x+3}$ 。

上节课所举出的例子中, 函数都是利用数学式子表示的。你知道函数还可以用什么方法表示吗?

尝试·思考

1. 某届全国图书交易博览会(书博会)零售图书总收入约2 200万元。

日期	第1天	第2天	第3天	第4天	第5天
收入/万元	386	548	320	351	595

(1) 书博会期间, 哪一天的零售收入最高?

(2) 收入是日期的函数吗? 为什么? 它是用什么方法表示的?

2. 如图2-3是某气象站用自动温度记录仪描出的某一天气温变化情况的曲线, 它直观地反映了变量 T 与 t 之间的对应关系。根据图象提供的信息, 回答下列问题:

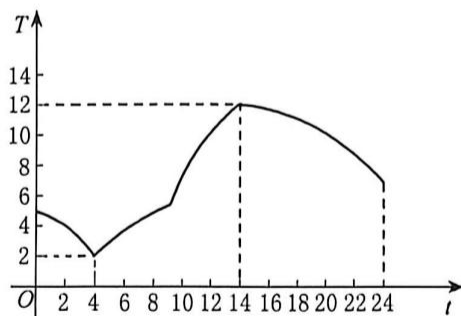


图2-3

自变量的取值范围是什么?

(1) 在这一天中, 何时气温最高? 何时气温最低?

(2) 气温 T 是时刻 t 的函数吗? 为什么? 它是用什么方法表示的?

思考·交流

表示函数的方法有哪几种？这些表示方法各有什么优缺点？请举例说明，并与同伴进行交流。

例3 求下列函数的自变量 x 的取值范围：

$$(1) y = 2x - 4; \quad (2) y = \frac{1}{4x+3};$$

$$(3) y = \sqrt{2x+1}; \quad (4) y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}.$$

解：(1) 自变量 x 的取值范围是全体实数。

(2) 使函数有意义的条件是 $4x+3 \neq 0$,

也就是 $x \neq -\frac{3}{4}$ 。

所以，函数 $y = \frac{1}{4x+3}$ 的自变量 x 的取值范围是 $x \neq -\frac{3}{4}$ 的实数。

(3) 使函数有意义的条件是 $2x+1 \geq 0$,

也就是 $x \geq -\frac{1}{2}$ 。

所以，函数 $y = \sqrt{2x+1}$ 的自变量 x 的取值范围是 $x \geq -\frac{1}{2}$ 的实数。

(4) 使函数有意义的条件是 $2-3x > 0$,

也就是 $x < \frac{2}{3}$ 。

所以，函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ 的自变量 x 的取值范围是 $x < \frac{2}{3}$ 的实数。

例4 用总长为60 m的篱笆围成矩形场地，求矩形的面积 S （单位： m^2 ）与它的一边长 x （单位： m ）之间的函数表达式，并求出 x 的取值范围。

解：因为矩形的周长为60 m，一边长为 x m，

所以矩形的另一边长为 $\frac{1}{2}(60-2x)$ m，即 $(30-x)$ m。

因此,矩形的面积 S 与 x 之间的函数表达式为

$$S=x(30-x)。$$

因为矩形的两边长分别为 x m, $(30-x)$ m,

$$\text{所以 } \begin{cases} x > 0, \\ 30-x > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < x < 30。$$

因此,自变量 x 的取值范围是 $0 < x < 30$ 。

如何确定函数自变量的取值范围?

函数自变量的取值范围,应使函数表达式有意义。在解决实际问题时,还必须考虑使实际问题有意义。

随堂练习

1. 求下列函数的自变量 x 的取值范围:

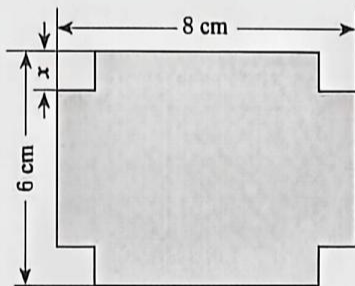
$$(1) y=x^2(x+1);$$

$$(2) y=\frac{x}{x-4};$$

$$(3) y=\sqrt{1-3x};$$

$$(4) y=\frac{3x}{\sqrt{x+5}}。$$

2. 从边长分别为6 cm, 8 cm的矩形纸片的四个角处各剪去一个边长为 x cm的小正方形(如图),求纸片剩余部分的面积 S (单位: cm^2)与 x (单位:cm)之间的函数表达式,并指出 x 的取值范围。



(第2题)

习题 2.1.2



知识技能

1. 求下列函数的自变量 x 的取值范围：

$$(1) y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+1};$$

$$(2) y = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}.$$

2. 小明设计了一个计算程序，输入的数 x 和输出的数 y 的数据如下表：

输入的数 x	1	2	3	4	5
输出的数 y	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

在这个问题中， y 是 x 的函数吗？它们之间的函数关系是用哪种方法表示的？你能用表达式法表示它们之间的关系吗？



问题解决

3. 某车间共有工人 20 名。已知每名工人每天可制造甲种零件 6 个或乙种零件 5 个，每制造一个甲种零件可创利润 150 元，每制造一个乙种零件可创利润 260 元。车间每天安排 x 名工人制造甲种零件，其余工人制造乙种零件。

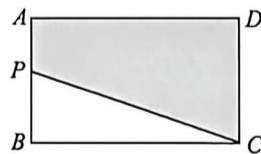
(1) 请写出此车间每天所创利润 y （单位：元）与 x （单位：人）之间的函数表达式；

(2) 如果要使车间每天所创利润不低于 24 000 元，你认为至少要安排多少名工人制造乙种零件？

4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 8$ 。点 P 在 AB 上运动，设 $PB = x$ ，图中阴影部分的面积为 y 。

(1) 写出阴影部分的面积 y 与 x 之间的函数表达式和自变量 x 的取值范围；

(2) 当 PB 的长为多少时，阴影部分的面积等于 20？



(第4题)

2

认识二次函数

某果园有 100 棵橙子树，平均每棵树结 600 个橙子。现准备多种一些橙子树以提高总产量，但是如果多种树，那么树之间的距离和每一棵树所接受的阳光就会减少。根据经验估计，每多种 1 棵树，平均每棵树就会少结 5 个橙子。

(1) 问题中有哪些变量？其中哪些是自变量？哪些是因变量？

(2) 假设果园增种 x 棵橙子树，那么果园共有多少棵橙子树？这时平均每棵树结多少个橙子？

(3) 如果果园橙子的总产量为 y 个，那么 y 与 x 之间的函数表达式是什么？ x 能取哪些值？

尝试 · 思考

(1) 某公司今年 4 月的利润为 20 万元，预计 5~6 月的利润将持续增长。如果设该公司今年 5 月、6 月利润的月均增长率为 x ，6 月的利润为 y 万元，那么 y 与 x 之间的函数表达式是什么？ x 能取哪些值？

(2) 已知矩形的周长为 40 cm，它的面积可能是 100 cm^2 吗？可能是 75 cm^2 吗？还可能是多少？如果设这个矩形的一条边长为 $x \text{ cm}$ ，面积为 $y \text{ cm}^2$ ，那么 y 与 x 之间的函数表达式是什么？ x 能取哪些值？

(3) 两个数的和是 20，设其中一个数是 x ，这两个数的积是 y ，那么 y 与 x 之间的函数表达式是什么？ x 能取哪些值？

观察 · 交流

观察由上述问题得到的函数表达式： $y = -5x^2 + 100x + 60\,000$ ， $y = 20x^2 + 40x + 20$ ， $y = -x^2 + 20x$ ，它们有什么共同特征？与同伴进行交流。

一般地，形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 的函数叫作 x 的二次函数 (quadratic function)。

例如, $y = -5x^2 + 100x + 60\ 000$, $y = 20x^2 + 40x + 20$ 和 $y = -x^2 + 20x$ 都是二次函数。我们以前学过的正方形面积 A 与边长 a 的关系 $A = a^2$, 圆面积 S 与半径 r 的关系 $S = \pi r^2$, 自由落体运动物体下落的高度 h 与下落的时间 t 的关系 $h = \frac{1}{2}gt^2$ 等也是二次函数的例子。

随堂练习

1. 下列函数中 (x, t 是自变量), 哪些是二次函数?

$$y = -\frac{1}{2} + 3x^2, y = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 25, y = 2^2 + 2x, s = 1 + t + 5t^2.$$

2. 写出等边三角形的面积 S 与其边长 a 之间的表达式, 并分别计算当 $a = 1, \sqrt{3}, 2$ 时三角形的面积。

习题 2.2.1



知识技能

1. 小球在某个斜坡上由静止开始向下滚动, 它在斜坡上滚动的路程 s (单位: m) 与滚动的时间 t (单位: s) 之间的函数表达式是 $s = 0.2t^2$ 。
- (1) 当滚动的时间为 2 s 时, 小球在斜坡上滚动的路程是多少?
- (2) 若斜坡长 5 m, 小球何时到达斜坡底部?
2. 举出一个生活中有关二次函数的例子。



问题解决

3. 某工厂计划为一批长方体形状的产品表面涂上油漆, 长方体的长和宽相等, 高比长多 0.5 m。
- (1) 长方体的长和宽用 x (单位: m) 表示, 长方体的表面积 S (单位: m^2) 的表达式是什么?

- (2) 如果涂漆每平方米所需要的费用是 5 元, 油漆每个长方体所需费用用 y (单位: 元) 表示, 那么 y 的表达式是什么?
4. 某超市欲购进一种今年新上市的产品, 购进价为 20 元/件。为了调查这种新产品的销路, 该超市进行了试销售, 得知该产品每天的销售量 t (单位: 件) 与每件的销售价 x (单位: 元/件) 之间有如下关系: $t = -3x + 70$ 。请写出该超市销售这种产品每天的销售利润 y (单位: 元) 与 x 之间的函数表达式。

3

二次函数的图象与性质

与一次函数的学习过程类似, 认识了二次函数的概念后, 接下来要研究二次函数的图象与性质。借助图象直观了解函数的性质, 是研究函数的重要方法。

二次函数的图象会是什么样子呢? 你打算按照什么思路展开研究呢?

让我们从最特殊的二次函数 $y = x^2$ 开始研究吧!

尝试·思考

画二次函数 $y = x^2$ 的图象。

(1) 观察表达式 $y = x^2$, 你认为 x 可以取哪些值? 与同伴进行交流。

(2) 选择适当的 x 值, 并计算相应的 y 值, 完成下表:

x							
$y = x^2$							

(3) 在平面直角坐标系中描点。如果需要, 可再多描一些点。你认为图象可能会是什么样子?

下面是小明画二次函数 $y=x^2$ 图象的基本步骤。

(1) 列表:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

(2) 描点: 如图 2-4 所示。

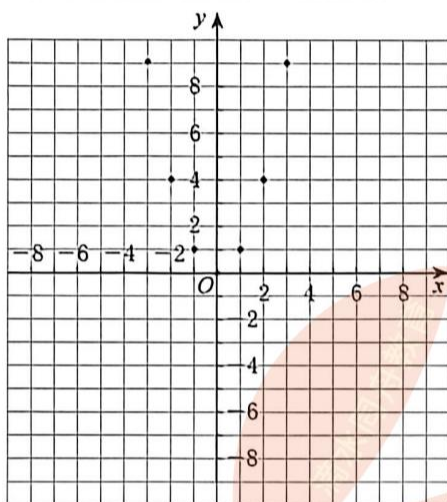


图 2-4

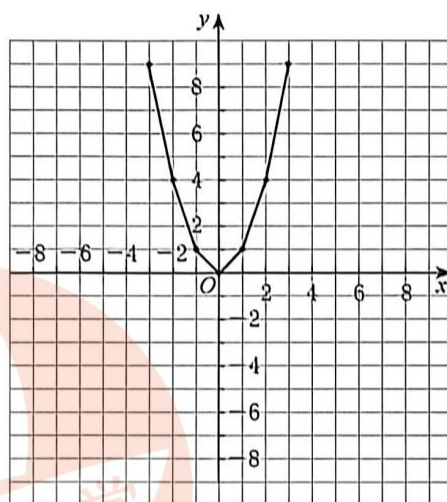


图 2-5

(3) 连线: 如图 2-5 所示。

你认为小明的画法正确吗? 说说你的理由。

在画二次函数的图象时, 要用光滑的曲线顺次连接各点, 如图 2-6 所示。

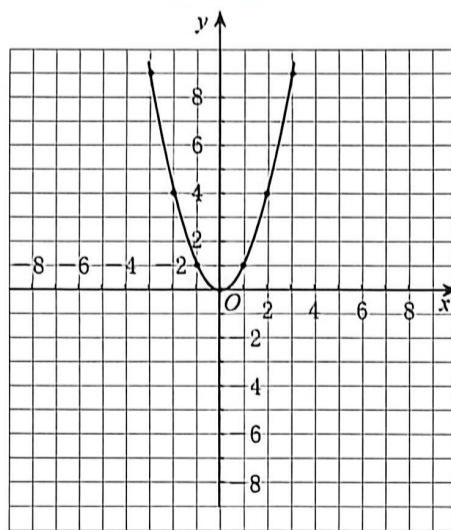


图 2-6

观察·思考

观察二次函数 $y=x^2$ 的图象。

- (1) 你能描述图象的特征吗?
- (2) 图象与 x 轴有交点吗? 如果有, 交点坐标是什么?
- (3) 当 $x<0$ 时, 随着 x 值的增大, y 的值如何变化? 当 $x>0$ 时呢?
- (4) y 的值可能小于0吗? 当 x 取什么值时, y 的值最小?
- (5) 图象是轴对称图形吗? 如果是, 它的对称轴是什么? 请你找出几对对称点。

如图2-7, 二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条抛物线 (parabola), 它的开口向上, 且关于 y 轴对称。对称轴与抛物线的交点是抛物线的顶点, 它是图象的最低点。

二次函数 $y=x^2$ 的图象也称为抛物线 $y=x^2$ 。

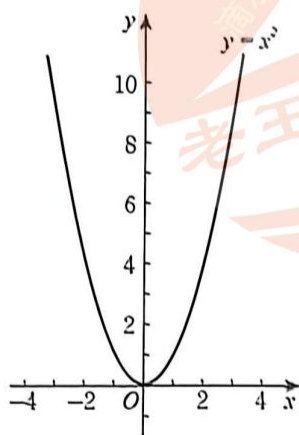


图 2-7

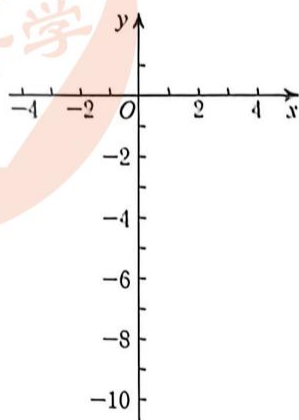


图 2-8

思考·交流

二次函数 $y=-x^2$ 的图象是什么形状? 先想一想, 然后在图2-8中画出它的图象。它与二次函数 $y=x^2$ 的图象有什么关系? 与同伴进行交流。



随堂练习

1. 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=x^2$ 与 $y=-x^2$ 的图象，并根据图象回答下列问题：
 - (1) $y=x^2$ 的图象与 $y=-x^2$ 的图象关于哪条直线对称？
 - (2) 这两个图象关于哪个点对称？
 - (3) 由 $y=x^2$ 的图象如何得到 $y=-x^2$ 的图象？

阅读·思考

二次函数的广泛应用

二次函数是刻画客观世界许多现象的一种重要模型。请看下面的一些例子。

1. 某一物体的质量为 m ，它的动能 E 与它的运动速度 v 之间的关系是

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (m \text{ 为定值}).$$

2. 导线的电阻为 R ，当导线中有电流通过时，单位时间所产生的热量 Q 与电流 I 之间的关系是

$$Q = RI^2 \quad (R \text{ 为定值}).$$

3. g 表示重力加速度，当物体由静止开始自由下落时，下落的距离 h 与下落时间 t 之间的关系是

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g \text{ 为定值}).$$

此外，二次函数在建筑学上也有重要应用，生活中不少建筑都设计成抛物线形状，如抛物线形桥梁、隧道等。

二次函数在现实生活中的应用非常广泛，你还能举出其他例子吗？



习题 2.3.1



知识技能

1. 设正方形的边长为 a , 面积为 S , 试画出 S 随着 a 的变化而变化的图象。
2. 在二次函数 $y=x^2$ 的图象上任取一点 $P(x_0, x_0^2)$, 请写出点 P 关于 y 轴对称的点 P' 的坐标, 并说明点 P' 在二次函数 $y=x^2$ 的图象上。



联系拓广

3. 点 $A(2, 4)$ 在二次函数 $y=x^2$ 的图象上吗? 请分别写出点 A 关于 x 轴的对称点 B 的坐标、关于 y 轴的对称点 C 的坐标、关于原点 O 的对称点 D 的坐标。点 B, C, D 在二次函数 $y=x^2$ 的图象上吗? 在二次函数 $y=-x^2$ 的图象上吗?

你知道两辆汽车在同向行驶时为什么要保持一定距离吗? 汽车刹车时向前滑行的距离(称为刹车距离)与什么因素有关?

影响刹车距离的最主要因素是汽车行驶的速度及路面的摩擦系数。有研究表明, 某种型号的汽车晴天在某段公路上行驶时, 速度 v (单位: km/h) 与刹车距离 s (单位: m) 之间的函数表达式为

$$s = \frac{1}{100} v^2,$$

雨天行驶时, v 与 s 之间的函数表达式为

$$s = \frac{1}{50} v^2。$$



操作 · 思考

图 2-9 是二次函数 $s = \frac{1}{100}v^2$ 的图象。请在同一平面直角坐标系中画出二次函数 $s = \frac{1}{50}v^2$ 的图象。

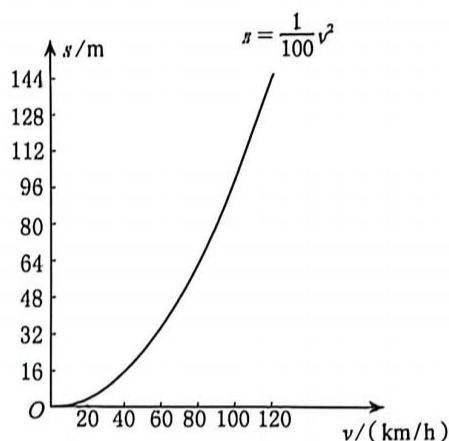


图 2-9

(1) 完成下表:

$v / (\text{km/h})$	0	20	40	60	80	100	120
s / m							

(2) 根据上表描点、连线, 画出二次函数 $s = \frac{1}{50}v^2$ 的图象。

观察 · 思考

(1) 在上述函数 $s = \frac{1}{100}v^2$ 和 $s = \frac{1}{50}v^2$ 中, 自变量 v 可以取任何值吗? 为什么?

(2) $s = \frac{1}{100}v^2$ 和 $s = \frac{1}{50}v^2$ 的图象有什么相同之处和不同之处?

(3) 如果该汽车行驶的速度是 60 km/h, 那么在雨天行驶和在晴天行驶相比, 刹车距离相差多少米? 你是怎么知道的?

我们已经认识了特殊的二次函数 $y = x^2$ 和 $y = -x^2$, 那么 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象有什么特征呢?



尝试·思考

画二次函数 $y=2x^2$ 的图象。

(1) 完成下表：

x							
$y=2x^2$							

(2) 在图 2-10 中画出二次函数 $y=2x^2$ 的图象。

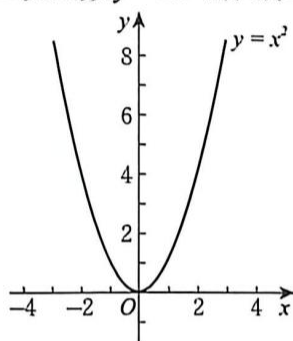


图 2-10

(3) 二次函数 $y=2x^2$ 的图象是什么形状？它与二次函数 $y=x^2$ 的图象有什么相同之处和不同之处？它的开口方向、对称轴和顶点坐标分别是什么？

操作·思考

(1) 在图 2-10 中画出 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象，它与 $y=x^2$ ， $y=2x^2$ 的图象有什么相同之处和不同之处？

(2) 在图 2-11 中画出二次函数 $y=-2x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象。

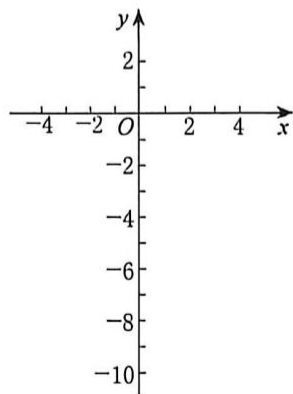


图 2-11



思考·交流

二次函数 $y = ax^2$ 的图象是什么形状？其中的系数 a 对图象有什么影响？与同伴进行交流。

二次函数 $y = ax^2$ 的图象是一条抛物线。抛物线 $y = ax^2$ 的对称轴是 y 轴，它的顶点坐标是原点。当 $a > 0$ 时，它的开口向上，顶点是它的最低点；当 $a < 0$ 时，它的开口向下，顶点是它的最高点。

随堂练习

- 二次函数 $y = -3x^2$ 的图象与二次函数 $y = 3x^2$ 的图象有什么关系？它们是轴对称图形吗？它们的开口方向、对称轴和顶点坐标分别是什么？先想一想，如果需要，画草图看一看。二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象与 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象呢？
- 二次函数 $y = \frac{1}{3}x^2$ 的图象与二次函数 $y = 3x^2$ 的图象有什么相同之处和不同之处？
- (1) 已知抛物线 $y = ax^2$ 经过点 $(2, 4)$ ，求 a 的值；
(2) 如果点 $(2, a)$ ， $(b, -8)$ 都在抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 上，求 a, b 的值。

习题 2.3.2



知识技能

1. 判断对错：

- 抛物线 $y = 6x^2$ 的开口向上；
- 二次函数 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 $(-1, a)$ ；
- 二次函数 $y = ax^2$ ($a < 0$) 的图象是轴对称图形；
- 二次函数 $y = ax^2$ ($a < 0$) 的图象有最低点；
- 若点 (m, n) 在抛物线 $y = ax^2$ 上，那么点 $(-m, n)$ 也在这条抛物线上。



2. (1) 写出圆的面积 S 与它的直径 d 之间的函数表达式;
 (2) 画出这个函数的图象;
 (3) 从图象上求出直径为 3.4 cm 时圆的面积 (结果精确到 0.1 cm^2)。
3. 已知点 $A(2, -1)$, $B(-3, m)$ 都在抛物线 $y = ax^2$ 上, 求 a 及 m 的值。
4. 已知二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 。
 (1) 画出这个函数的图象;
 (2) 当 $x = 2, -1.8$ 时, 求 y 的值;
 (3) 当 $y = -2, -1.28$ 时, 求 x 的值。

我们已经研究了二次函数 $y = ax^2$ 的图象。那么二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象有什么特征? 它与 $y = ax^2$ 的图象有什么关系呢? 比如 $y = 2x^2 + 1$ 的图象, 它与二次函数 $y = 2x^2$ 的图象有什么关系?

操作 · 思考

画二次函数 $y = 2x^2 + 1$ 的图象。

(1) 完成下表, 你能发现 $2x^2$ 与 $2x^2 + 1$ 的值有什么关系?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$							
$y = 2x^2 + 1$							



(2) 在图 2-12 中, 画出函数 $y = 2x^2 + 1$ 的图象。你是怎么画的? 与同伴进行交流。

(3) 二次函数 $y = 2x^2 + 1$ 的图象与二次函数 $y = 2x^2$ 的图象有什么关系? 它是轴对称图形吗? 它的对称轴和顶点坐标分别是什么?

(4) 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而增大? 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而减小?

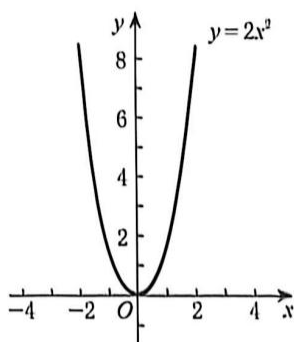


图 2-12

尝试 · 思考

二次函数 $y = 2x^2 - 2$ 的图象是什么形状? 它与二次函数 $y = 2x^2$ 的图象有什么关系? 画出它的图象。它的图象有什么特点?

二次函数 $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$ 与 $y = 2x^2 - 2$ 的图象都是抛物线, 它们与抛物线 $y = 2x^2$ 的形状相同, 只是位置不同。将函数 $y = 2x^2$ 的图象向上平移 1 个单位长度, 就得到函数 $y = 2x^2 + 1$ 的图象; 将函数 $y = 2x^2$ 的图象向下平移 2 个单位长度, 就得到函数 $y = 2x^2 - 2$ 的图象。

思考 · 交流

二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象是什么形状? 其中的 k 对图象有什么影响? 与同伴进行交流。

二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象是一条抛物线, 它与二次函数 $y = ax^2$ 的图象形状相同, 只是位置不同。将二次函数 $y = ax^2$ 的图象上下平移, 就可以得到二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象。

当 $k > 0$ 时, 将二次函数 $y = ax^2$ 的图象向上平移 k 个单位长度, 就得到二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象; 当 $k < 0$ 时, 将二次函数 $y = ax^2$ 的图象向下平移 $-k$ 个单位长度, 就得到二次函数 $y = ax^2 + k$ 的图象。抛物线 $y = ax^2 + k$ 的对称轴为 y 轴, 顶点坐标为 $(0, k)$ 。



随堂练习

- 二次函数 $y=3x^2-\frac{1}{2}$ 的图象与二次函数 $y=3x^2$ 的图象有什么关系？它是轴对称图形吗？它的开口方向、对称轴和顶点坐标分别是什么？画图看一看。
- 二次函数 $y=-2x^2-\frac{1}{2}$ 的图象与二次函数 $y=-2x^2+\frac{1}{2}$ 的图象有什么关系？

习题 2.3.3



知识技能

- 在同一平面直角坐标系中画出下列二次函数的图象：

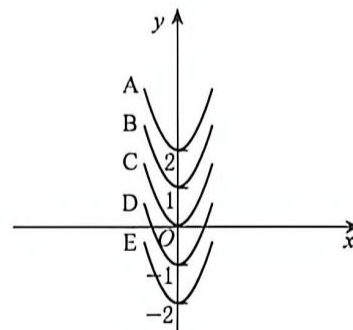
$$y=-\frac{1}{2}x^2, y=-\frac{1}{2}x^2+2, y=-\frac{1}{2}x^2-2.$$

根据图象，填写下表：

二次函数	性质			
	开口方向	对称轴	顶点坐标	x 取哪些值时， y 的值随着 x 值的增大而增大
$y=-\frac{1}{2}x^2$				
$y=-\frac{1}{2}x^2+2$				
$y=-\frac{1}{2}x^2-2$				

- 下列二次函数在同一平面直角坐标系中的图象如图所示，将函数图象的序号填在对应函数表达式后面的括号里：

- $y=2x^2$; ()
- $y=2x^2+1$; ()
- $y=2x^2+2$; ()
- $y=2x^2-1$; ()
- $y=2x^2-2$ 。 ()



(第2题)

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象有什么特征？它与二次函数 $y=ax^2$ 的图象有什么关系？比如，二次函数 $y=2(x-1)^2$ 的图象与二次函数 $y=2x^2$ 的图象有什么关系？

操作·思考

画二次函数 $y=2(x-1)^2$ 的图象。

(1) 完成下表，你能发现 $2(x-1)^2$ 与 $2x^2$ 的值有什么关系？

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2x^2$									
$y=2(x-1)^2$									

(2) 在图 2-13 中，画出 $y=2(x-1)^2$ 的图象。你是怎么画的？与同伴进行交流。

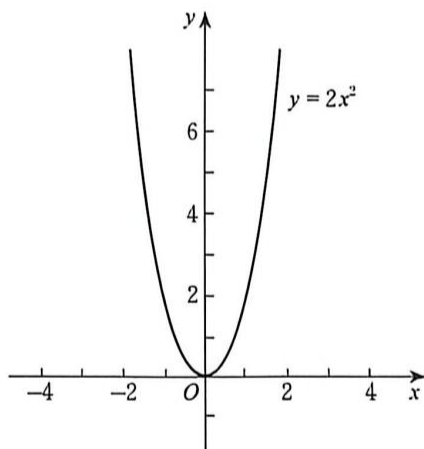


图 2-13

(3) 二次函数 $y=2(x-1)^2$ 的图象与二次函数 $y=2x^2$ 的图象有什么关系？它的开口方向、对称轴和顶点坐标分别是什么？

(4) 当 x 取哪些值时， y 的值随着 x 值的增大而增大？当 x 取哪些值时， y 的值随着 x 值的增大而减小？

类似地，你能发现二次函数 $y=2(x+1)^2$ 的图象与二次函数 $y=2x^2$ 的图象有什么关系吗？

二次函数 $y=2x^2$ ， $y=2(x-1)^2$ ， $y=2(x+1)^2$ 的图象都是抛物线，并且形状相同，只是位置不同。将二次函数 $y=2x^2$ 的图象向右平移1个单位长度，就得到函数 $y=2(x-1)^2$ 的图象；将二次函数 $y=2x^2$ 的图象向左平移1个单位长度，就得到函数 $y=2(x+1)^2$ 的图象。

尝试·思考

(1) 二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ ， $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象分别与二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象有什么关系？它们是轴对称图形吗？对称轴和顶点坐标分别是什么？

(2) 当 x 取哪些值时，函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的值随着 x 值的增大而增大？当 x 取哪些值时，函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的值随着 x 值的增大而减小？函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 呢？

二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ ， $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象都是抛物线，它们与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的形状相同，只是位置不同。将二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象向左平移1个单位长度，就得到二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象；将二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象向右平移2个单位长度，就得到二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象。

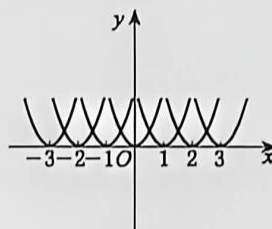
思考·交流

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象是什么形状？其中的 h 对图象有什么影响？与同伴进行交流。

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象是一条抛物线，它的形状与二次函数 $y=ax^2$ 的图象形状相同，只是位置不同。将函数 $y=ax^2$ 的图象左右平移就可以得到函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象。

随堂练习

1. 图中有七条形状相同的抛物线，如果中间一条抛物线对应的函数表达式是 $y = 2x^2$ ，那么，从左到右其余六条抛物线对应的函数表达式是什么？



(第1题)

2. 对于二次函数 $y = -3(x+2)^2$ ：
- (1) 它的图象与二次函数 $y = -3x^2$ 的图象有什么关系？它是轴对称图形吗？它的开口方向、对称轴和顶点坐标分别是什么？
- (2) 当 x 取哪些值时， y 的值随着 x 值的增大而增大？当 x 取哪些值时， y 的值随着 x 值的增大而减小？

习题 2.3.4



知识技能

1. 在同一平面直角坐标系中画出下列二次函数的图象：

$$y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{2}(x+2)^2, y = \frac{1}{2}(x-2)^2.$$

根据图象，填写下表：

二次函数	性质			
	开口方向	对称轴	顶点坐标	x 取哪些值时， y 的值随着 x 值的增大而增大
$y = \frac{1}{2}x^2$				
$y = \frac{1}{2}(x+2)^2$				
$y = \frac{1}{2}(x-2)^2$				

2. 在同一平面直角坐标系中, 二次函数 $y = -3(x - \frac{1}{2})^2$ 的图象与二次函数 $y = -3x^2$ 的图象有什么关系?



联系拓广

3. 怎样由 $y = 2x^2$ 的图象得到函数 $y = 2(x - 1)^2$ 的图象? 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而增大? 当 x 取哪些值时, y 的值随着 x 值的增大而减小?
4. 分别写出两个符合下列条件的二次函数的表达式:
- (1) 函数的图象不经过第三、四象限;
 - (2) 函数图象只有顶点坐标不同。

二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的图象有什么特征? 它与二次函数 $y = a(x - h)^2$ 的图象有什么关系? 比如, 二次函数 $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$ 的图象与二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象有什么关系?

操作·思考

- (1) 在同一平面直角坐标系中, 分别画出二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$, $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$ 的图象, 验证你的结论, 并与同伴进行交流。

- (2) 填写下表:

二次函数	图象特征		
	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y = -\frac{1}{2}x^2$			
$y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$			
$y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$			

二次函数 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ 的图象是一条抛物线，它与抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的形状相同，只是位置不同。将二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象向下平移 1 个单位长度就得到二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ 的图象，再向左平移 1 个单位长度就得到二次函数 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ 的图象。

思考 · 交流

二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象与二次函数 $y = ax^2$ 的图象有什么关系？与同伴进行交流。

一般地，平移二次函数 $y = ax^2$ 的图象就可以得到二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象。因此，二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象是一条抛物线，它的开口方向、对称轴和顶点坐标如下表所示：

二次函数	图象特征		
	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y = a(x-h)^2 + k$	向上 ($a > 0$)	直线 $x = h$	(h, k)
	向下 ($a < 0$)		

随堂练习

1. 确定下列二次函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标：

$$(1) y = 2(x+3)^2 - \frac{1}{2};$$

$$(2) y = -\frac{1}{3}(x+1)^2 - 5.$$

习题 2.3.5

知识技能

1. 确定下列二次函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标,必要时画出草图验证:

(1) $y=2(x-3)^2-5$;

(2) $y=-0.5(x+1)^2$;

(3) $y=-\frac{3}{4}x^2-1$;

(4) $y=2(x-2)^2+5$;

(5) $y=0.5(x+4)^2+2$;

(6) $y=-\frac{3}{4}(x-3)^2$.

2. 下列函数,当 x 在什么范围内时, y 的值随着 x 值的增大而增大?当 x 在什么范围内时, y 的值随着 x 值的增大而减小?

(1) $y=4(x-\frac{1}{2})^2-3$;

(2) $y=-2(x-8)^2+5$.

尝试·思考

我们已经认识了形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函数的图象和性质,你能研究二次函数 $y=2x^2-8x+7$ 的图象和性质吗?请你试一试。

将 $y=2x^2-8x+7$ 的右边配方,得

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 7 \\ &= 2(x^2 - 4x) + 7 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4) - 8 + 7 \\ &= 2(x-2)^2 - 1. \end{aligned}$$

化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式呗!



如图 2-14，我们可以先画出二次函数 $y = 2x^2$ 的图象，然后将这个图象先向右平移 2 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，就得到二次函数 $y = 2x^2 - 8x + 7$ 的图象。

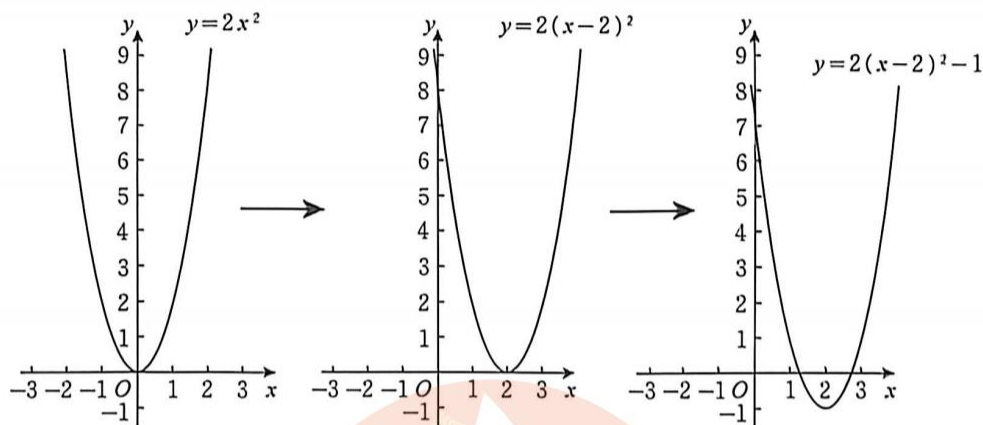


图 2-14

从图象可以看出：当 $x < 2$ 时， y 的值随着 x 值的增大而减小；当 $x > 2$ 时， y 的值随着 x 值的增大而增大；当 $x = 2$ 时， y 的值最小， $y_{\text{最小}} = -1$ 。

操作·交流

确定下列二次函数图象的对称轴和顶点坐标，并与同伴进行交流。

- (1) $y = 3x^2 - 6x + 7$; (2) $y = 2x^2 - 12x + 8$ 。

一般地，对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ，我们可以利用配方法推导出它的图象的对称轴和顶点坐标。

把二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的右边配方，得

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

因此,二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是一条抛物线, 它的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ 。

观察·思考

如图 2-15 所示, 桥梁上两条钢缆的形状可以近似看成两条相同的抛物线, 而且左、右两条抛物线关于 y 轴对称。按照图中的平面直角坐标系, y 轴左侧的一条抛物线可以用 $y = \frac{9}{400}x^2 + \frac{9}{10}x + 10$ ($-40 \leq x \leq 0$) 表示。

(1) 钢缆的最低点到桥面的距离是多少?

(2) 两条钢缆最低点之间的距离是多少?

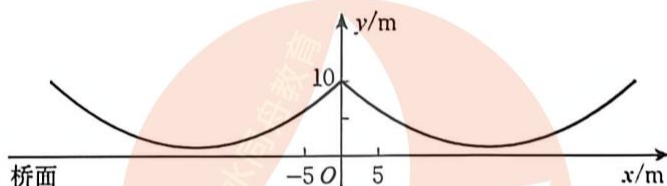


图 2-15

回顾·反思

我们是如何展开对二次函数图象与性质的研究的? 对此, 你有什么感悟? 积累了哪些经验?

随堂练习

1. 用配方法确定下列二次函数图象的对称轴和顶点坐标:

(1) $y = 2x^2 - 12x + 13$;

(2) $y = -5x^2 + 80x - 319$;

(3) $y = 2(x - \frac{1}{2})(x - 2)$;

(4) $y = 3(2x + 1)(2 - x)$ 。



阅读·欣赏

利用信息技术探索二次函数系数与图象的关系

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中的系数 a , b , c 对图象有什么影响？我们可以借助于计算机进行探究。

许多计算机软件都可以方便地画出二次函数的图象，帮助我们探索二次函数的性质。例如，某种软件的主界面包括代数区、绘图区、3D 绘图区、表格区等。可以直接在“输入”框中键入“ $y = ax^2 + bx + c$ ”后，确认“创建滑动条： a , b , c ”，如图 2-16，绘图区会出现函数图象，同时代数区会出现函数表达式，如图 2-17。拖动滑动条就能直观地观察函数图象随着 a , b , c 改变的变化情况，滑动条拖至 $a=3$, $b=-6$, $c=1$ ，绘图区就会出现二次函数 $y = 3x^2 - 6x + 1$ 的图象。

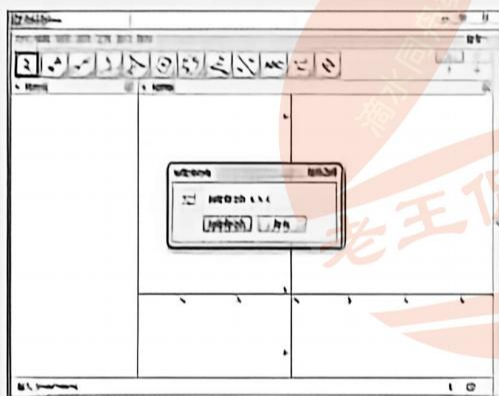


图 2-16

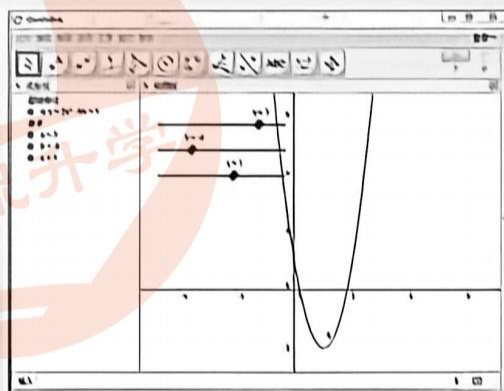


图 2-17

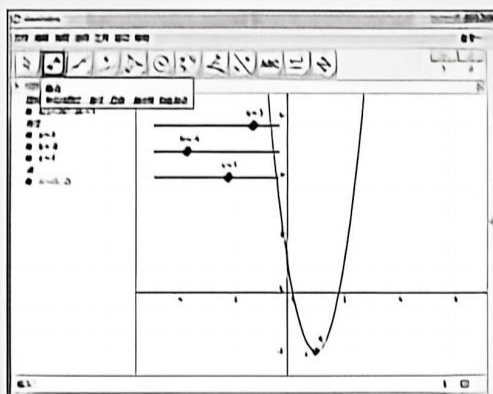


图 2-18

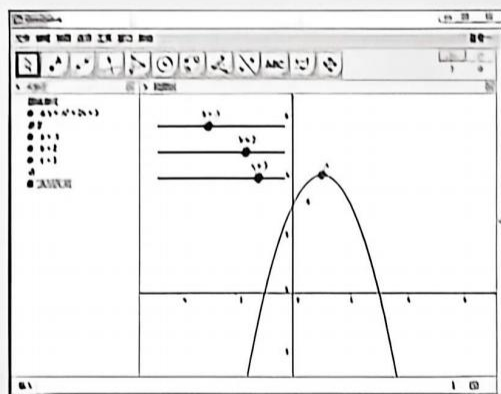


图 2-19

利用描点功能，我们可以在函数图象上画一点 A ，拖动点 A 沿抛物线移动，观察点 A 坐标的变化，如图 2-18，可以发现：当 $x < 1$ 时， y 随着 x 的增大而减小，当 $x > 1$ 时， y 随着 x 的增大而增大；图象最低点的坐标是 $(1, -2)$ ，即当 $x = 1$ 时， y 有最小值 -2 。

我们还可以用鼠标双击代数区的数字 a, b, c ，如图 2-19，直接输入 $a = -1, b = 2, c = 3$ ，绘图区就会出现二次函数 $y = -x^2 + 2x + 3$ 的图象，拖动点 A ，可以发现：当 $x < 1$ 时， y 随着 x 的增大而增大，当 $x > 1$ 时， y 随着 x 的增大而减小；图象最高点的坐标是 $(1, 4)$ ，即当 $x = 1$ 时， y 有最大值 4 。

不断改变系数 a, b, c ，观察软件画出的二次函数图象，你有什么发现？你能得到二次函数系数与图象的关系吗？

借助软件，我们还可以比较方便地利用二次函数的图象解一元二次方程。例如，拖动图 2-19 中的点 A ，可以显示图象与 x 轴的两个交点坐标为 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$ ，从而得到方程 $-x^2 + 2x + 3 = 0$ 的解为 $x_1 = -1, x_2 = 3$ 。因此，如果想要解方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，只要用软件画出相应二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象，再显示图象与 x 轴的交点的横坐标，就能得到方程的解。

习题 2.3.6

知识技能

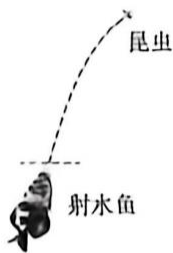
- 确定下列二次函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标，必要时画出草图验证：
 - $y = 2(x - 2)^2 + 5$;
 - $y = 2x^2 - 4x - 1$;
 - $y = 3x^2 - 6x + 2$;
 - $y = -3(x + 3)(x + 9)$ 。
- 将二次函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 的图象向上平移 2 个单位长度，再向左平移 3 个单位长度，得到抛物线 $y = x^2 + bx + c$ ，求 b, c 的值，并确定这条抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，必要时画草图进行验证。





问题解决

3. 某物体由静止竖直向上运动，物体运动的高度 h (单位: m) 与运动的时间 t (单位: s) 的关系可以用公式 $h = -5t^2 + 150t + 10$ 表示。经过多长时间，该物体到达最高点？最高点的高度是多少？
4. 射水鱼以陆生昆虫为食。它在捕食时，能从口中射出一股水流，准确击中 2 m 以内的昆虫。如果不考虑空气阻力，那么射水鱼射出的水流可以看成一条抛物线的一部分 (如图)。在一次捕食时，射水鱼射出的水珠运动的高度 y (单位: cm) 与向前运动的水平距离 x (单位: cm) 的关系可以近似地表示为 $y = -0.1x^2 + 4x$ 。根据这一关系回答下列问题：



(第4题)

- (1) 如果这次射出的水流没有遇到障碍物，那么当水珠向前运动的水平距离在什么范围时，它运动的高度逐步上升？当水珠向前运动的水平距离在什么范围时，它运动的高度逐步下降？水珠运动的最大高度是多少？
- (2) 假设要捕食的昆虫位于射水鱼正前方水平距离 20 cm、高度 50 cm 处，那么这次射出的水流能否击中这只昆虫？

4

确定二次函数的表达式

如图 2-20，某农户搭建了一个蔬菜大棚，其棚顶的横截面为抛物线的一段 (曲线 AOB)。它的拱宽 AB 为 6 m，拱高 CO 为 0.9 m。试建立适当的平面直角坐标系，写出这段抛物线所对应的二次函数的表达式。

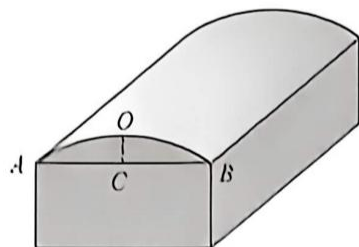


图 2-20



如图 2-21, 以线段 AB 的垂直平分线为 y 轴, 以过点 O 且垂直于 y 轴的直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系。这时, 棚顶的横截面所成抛物线的顶点在坐标原点, 对称轴是 y 轴, 所以可设它的函数表达式为

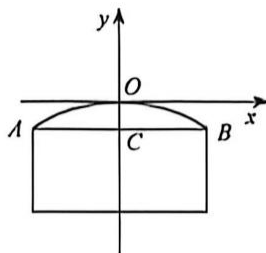


图 2-21

$$y = ax^2 (a \neq 0). \quad ①$$

因为 AB 与 y 轴交于点 C , 所以 $CB = \frac{AB}{2} = 3$ (m)。

因为 $CO = 0.9$ m, 所以点 B 的坐标为 $(3, -0.9)$ 。

因为点 B 在这段抛物线上, 将它的坐标代入 ①, 得

$$-0.9 = a \times 3^2,$$

所以 $a = -0.1$ 。

因此, 这段抛物线所对应的二次函数的表达式是

$$y = -0.1x^2 (-3 \leq x \leq 3)。$$

待定系数法可以确定 a, b, c 的值。

例 1 已知一个二次函数的图象的对称轴为直线 $x = -2$, 与 y 轴交点的纵坐标为 2, 且经过点 $(-3, -1)$, 求这个二次函数的表达式。

解: 设二次函数的表达式为

$$y = ax^2 + bx + c。$$

因为二次函数的图象与 y 轴交点的纵坐标为 2, 即经过点 $(0, 2)$,

可得 $c = 2$ 。

所以 $y = ax^2 + bx + 2$ 。 ①

又因为二次函数的对称轴为直线 $x = -2$,

所以 $-\frac{b}{2a} = -2,$

即 $b = 4a$ 。 ②



因为二次函数的图象经过点 $(-3, -1)$ ，将坐标代入①式，得

$$9a - 3b + 2 = -1. \quad \text{③}$$

由②③，解得 $a=1, b=4$ 。

所以，这个二次函数的表达式为 $y=x^2+4x+2$ 。

思考·交流

(1) 例1还有没有其他解法？与同伴进行交流。

(2) 如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的顶点坐标为 (h, k) ，那么这个二次函数的表达式可表示成什么形式呢？

若二次函数的图象的顶点坐标为 (h, k) ，可以设二次函数的表达式为 $y=a(x-h)^2+k$ 。

例2 已知二次函数图象的顶点坐标是 $(-1, -6)$ ，并且该图象经过点 $(2, 3)$ ，求这个二次函数的表达式。

解：因为二次函数图象的顶点坐标是 $(-1, -6)$ ，所以可设这个二次函数的表达式为

$$y=a(x+1)^2-6.$$

又因为该图象经过点 $(2, 3)$ ，将坐标代入上式，得

$$3=a(2+1)^2-6,$$

解得 $a=1$ 。

所以，这个二次函数的表达式是 $y=(x+1)^2-6$ ，即

$$y=x^2+2x-5.$$

随堂练习

1. 根据下列条件，分别求出对应的二次函数表达式：

(1) 已知图象的顶点在坐标原点，且图象经过点 $(2, 8)$ ；

(2) 已知图象的顶点坐标是 $(-1, -2)$ ，且图象经过点 $(1, 10)$ 。



习题 2.4.1



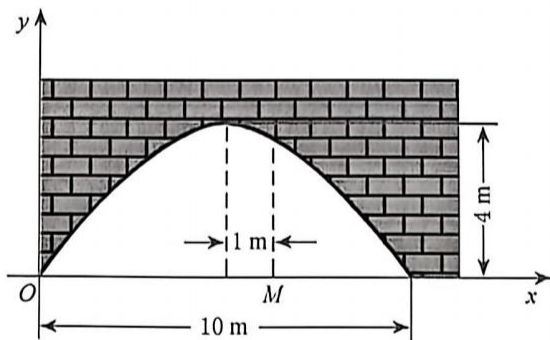
知识技能

- 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $(2, 1)$ ，且这条抛物线与 x 轴的一个交点坐标是 $(3, 0)$ 。
 - 求这条抛物线的表达式；
 - 求这条抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标。
- 已知二次函数图象的顶点在坐标原点，且图象经过点 $(3, -27)$ 。将它向左平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，求平移后对应的二次函数的表达式。
- 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(0, 1)$ ， $B(2, -1)$ ，试判断点 $P(-1, 2)$ 是否在这个二次函数的图象上。



问题解决

- 有一座抛物线形拱桥，桥洞离水面的最大高度为 4 m，跨度为 10 m。如图所示，建立平面直角坐标系。
 - 求这条抛物线所对应的函数表达式；
 - 如图，在这条抛物线的对称轴右边 1 m 处，桥洞离水面的高度是多少？



(第4题)



5

二次函数的应用

如图 2-22，在一个直角三角形的内部作一个矩形 $ABCD$ ，其中 AB 和 AD 分别在两条直角边上，点 C 在斜边上。

- (1) 如果设 $AB = x$ m，其中 $0 < x < 40$ ，那么 AD 边的长度如何表示？
- (2) 设矩形的面积为 y m²，当 x 取何值时， y 的值最大？最大值是多少？

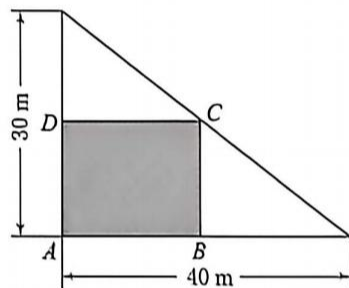


图 2-22

思考·交流

在上面的问题中，直角三角形不变，如果把矩形改为如图 2-23 所示的位置， BC 在斜边上，点 A, D 分别在两条直角边上，那么矩形 $ABCD$ 的最大面积是多少？你是怎样知道的？与同伴进行交流。

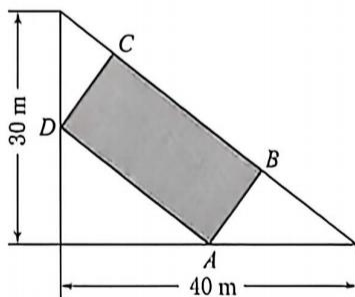


图 2-23



例1 某建筑物的窗户如图 2-24 所示(单位: m), 它的上半部分是半圆, 下半部分是矩形, 制造窗框的材料总长(图中所有黑线的长度之和)为 15 m, 不考虑材料的宽度及制造中的接口损耗。当 x 等于多少时, 窗户的面积最大? 最大面积是多少?

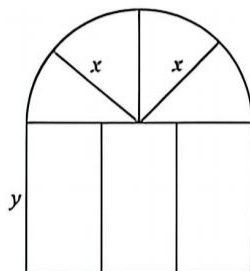


图 2-24

解: 根据题意, 得 $7x + 4y + \pi x = 15$,

$$\text{所以 } y = \frac{15 - 7x - \pi x}{4}.$$

因为 $0 < x < 15$, 且 $0 < \frac{15 - 7x - \pi x}{4} < 15$,

所以 $0 < x < \frac{15}{\pi + 7}$.

设窗户的面积为 $S \text{ m}^2$, 则

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\pi x^2 + 2xy \\ &= \frac{1}{2}\pi x^2 + 2x \cdot \frac{15 - 7x - \pi x}{4} \\ &= -\frac{7}{2}x^2 + \frac{15}{2}x \\ &= -\frac{7}{2}\left(x - \frac{15}{14}\right)^2 + \frac{225}{56}. \end{aligned}$$

所以, 当 $x = \frac{15}{14}$ 时, $S_{\text{最大}} = \frac{225}{56}$.

因此, 当 x 为 $\frac{15}{14}$ 时, 窗户的面积最大, 最大面积为 $\frac{225}{56} \text{ m}^2$.

随堂练习

1. 图 2-22 的问题中, 如果设 $AD = x \text{ m}$, 其中 $0 < x < 30$, 那么如何求矩形 $ABCD$ 的最大面积?

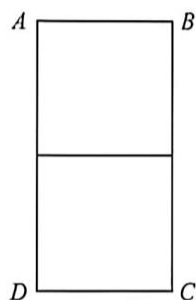


习题 2.5.1

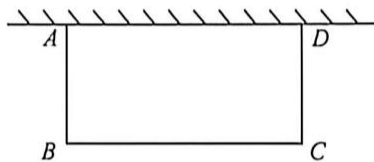


问题解决

1. 如图, 用一根金属型材制作一个“日”字形窗户的框架 $ABCD$, 这根金属型材总长为 6 m, 不考虑金属型材的宽度及制造中的接口损耗, 当 AB , AD 分别为多少米时, 窗户的面积最大? 最大面积是多少?

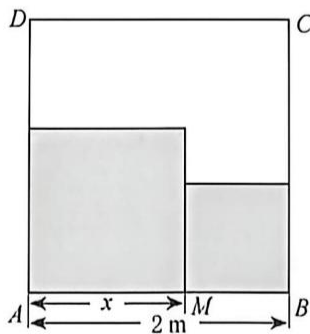


(第1题)



(第2题)

2. 小亮父亲想用长为 80 m 的栅栏, 再借助房屋的外墙围成一个矩形的羊圈。已知房屋外墙长 50 m, 设矩形 $ABCD$ 的边 $AB = x$ m, 面积为 S m²。
- (1) 写出 S 与 x 之间的函数表达式, 并指出 x 的取值范围;
- (2) 当羊圈的长和宽分别为多少米时, 羊圈的面积最大? 最大面积是多少?
3. 如图, 在边长为 2 m 的正方形铁板内, 沿着一条边恰好截取两块相邻的正方形板料。要使截取的板料面积最小, 应该怎样截取?



(第3题)



服装厂生产某品牌的短袖上衣，成本是每件 20 元。根据市场调查，以 26 元的单价批发给经销商，经销商愿意购进 5 000 件，并且表示批发单价每降 0.5 元，愿意多购进 500 件。为了获得最大利润，该服装厂应将批发单价定为多少？

例2 某旅馆有客房 120 间，当每间客房的日租金为 160 元时，每天都客满。经市场调查发现，每间客房的日租金每增加 10 元，每天客房出租数会减少 6 间。如果不考虑其他因素，那么该旅馆将每间客房的日租金增加到多少元时，客房日租金的总收入最高？最高总收入是多少？

解：设每间客房的日租金增加 $10x$ 元，客房日租金的总收入为 y 元，则每天客房出租数会减少 $6x$ 间。

$$\begin{aligned} y &= (160 + 10x)(120 - 6x) \\ &= -60(x - 2)^2 + 19\,440. \end{aligned}$$

因为 $x \geq 0$ ，且 $120 - 6x > 0$ ，

所以 $0 \leq x < 20$ 。

当 $x = 2$ 时， y 取得最大值， $y_{\text{最大}} = 19\,440$ 。

$160 + 10x = 160 + 10 \times 2 = 180$ (元)。

因此，每间客房的日租金增加到 180 元时，客房日租金的总收入最高，最高总收入为 19 440 元。

尝试 · 思考

还记得本章前面研究过的“种多少棵橙子树”的问题吗？我们得到表示增种橙子树的数量 x (单位：棵) 与橙子总产量 y (单位：个) 的二次函数表达式

$$\begin{aligned} y &= (600 - 5x)(100 + x) \\ &= -5x^2 + 100x + 60\,000. \end{aligned}$$

(1) 在图 2-25 中画出这个函数的图象，并描述橙子的总产量与增种橙子树

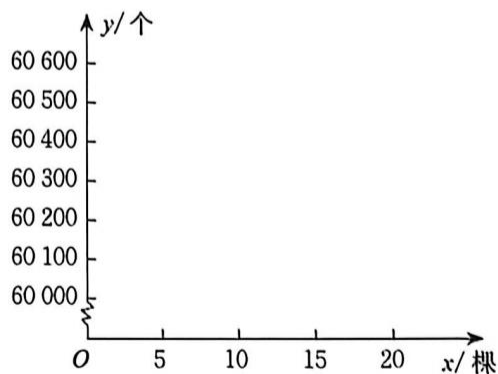


图 2-25



的棵数之间的关系。

(2) 增种多少棵橙子树, 可以使橙子的总产量在 60 400 个以上?

随堂练习

1. 某商店购进一批单价为 20 元的日用商品, 如果以单价 30 元销售, 那么半个月内可售出 400 件。根据销售经验, 该商店将这种日用商品的销售单价每提高 1 元, 销售量相应减少 20 件。销售单价定为多少元时, 半个月内获得的利润最大? 最大利润是多少?

阅读·欣赏

平均数、方差与二次函数

在科学实验中, 经常需要测定某一个量 a 的大小。由于测量工具和测量方法的限制, 测量的结果往往只是 a 的近似值。为此, 需对它做 n 次观测, 测得 n 个数据 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 然后取它们的平均数 $\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, 作为

对 a 的测定值。你能说出这样做的道理吗?

为了回答这个问题, 考虑关于变量 x 的二次函数

$$y = \frac{1}{n} [(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2].$$

由于

$$y = \frac{1}{n} [nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)]$$

$$= x^2 - \frac{2}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + \frac{1}{n} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2),$$

所以, 当 $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \bar{x}$ 时, y 取最小值。

$$\text{这时 } y_{\text{最小}} = \frac{1}{n} [(\bar{x} - a_1)^2 + (\bar{x} - a_2)^2 + \dots + (\bar{x} - a_n)^2].$$

$y_{\text{最小}}$ 正是数据 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的方差。

因此, 我们通常把观测数据的平均数 $\bar{x}$ 作为对 a 的测定值。



习题 2.5.2



问题解决

1. 某旅行社组团去某地旅游, 30人起组团, 报价为800元/人。旅行社对超过30人的团给予优惠: 旅游团每增加1人, 报价就降低10元/人。你能帮助算一下, 当一个旅游团的人数是多少时, 该旅行社可以获得最大营业额? 最大营业额是多少?
2. 某商店购进一批单价为8元的商品, 如果以单价10元出售, 那么每天可销售100件。经调查发现, 这种商品的销售单价每提高1元, 其销售量相应减少10件。该商店将这种商品的销售单价定为多少时, 每天所获销售利润最大? 最大利润是多少?
3. 在测量时, 为了确定被测对象的最佳值, 经常要对同一对象测量若干次, 然后选取与各测量数据的差的平方和为最小的数作为最佳近似值。例如, 为了确定某种大麦穗长度的最佳值, 测量了5个大麦穗的长度, 得到的数据(单位: cm)如下:

6.5, 5.9, 6.0, 6.7, 4.5。

那么这种大麦穗长度的最佳近似值可以取使函数

$$y = (x - 6.5)^2 + (x - 5.9)^2 + (x - 6.0)^2 + (x - 6.7)^2 + (x - 4.5)^2$$

为最小值的 x 值。整理上式, 并求出这种大麦穗长度的最佳近似值。

如图2-26, 某工厂的大门呈抛物线形, 大门底部 AB 宽为4 m, 顶部 C 距地面的高度为4.4 m。

(1) 试建立适当的平面直角坐标系, 求抛物线对应的二次函数表达式;

(2) 一辆满载货物的汽车欲通过大门, 货物顶部距地面2.65 m, 装货宽度为2.4 m, 那么这辆汽车能否顺利通过大门?

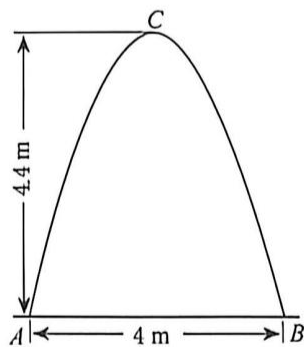


图2-26



尝试·思考

在上面的问题中，如果装货宽度为 2.4 m 的汽车能顺利通过大门，那么货物顶部距地面的最大高度是多少（结果精确到 0.01 m）？

例3 如图 2-27 所示，公园要建造一个圆形喷水池，在水池中央点 O 处安装一根垂直于水面的柱形喷水装置 OA ， $OA=1.25$ m。水流由顶端 A 处的喷头向外喷出，在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落下。为使水流形状看起来较为美观，设计要求水流在与 OA 的距离为 1 m 处达到最高点，这时距水面的最大高度为 2.25 m。如果不计其他因素，那么水池的半径至少是多少米时，才能使喷出的水流不致落到池外？

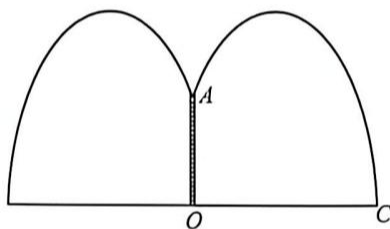


图 2-27

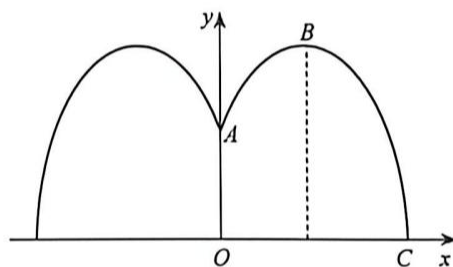


图 2-28

解：如图 2-28，以 OC 所在的直线为 x 轴， OA 所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系。

由条件知点 A 的坐标为 $(0, 1.25)$ ，若点 B 为右边抛物线的顶点，则其坐标为 $(1, 2.25)$ ，因此，可设右边的抛物线的表达式为 $y=a(x-1)^2+2.25$ ，将点 A 的坐标代入 $y=a(x-1)^2+2.25$ ，得 $1.25=a+2.25$ 。

解得 $a=-1$ 。

故右边抛物线的表达式为 $y=-(x-1)^2+2.25$ 。

当 $y=0$ 时， $x_1=-0.5$ ， $x_2=2.5$ 。

即点 C 的坐标为 $(2.5, 0)$ 。

所以，水池的半径至少为 2.5 m 时，才能使喷出的水流不致落到池外。

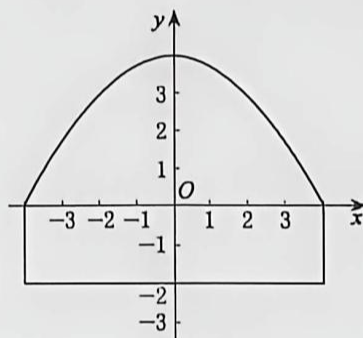
思考·交流

- (1) 对于例3, 你还有其他解法吗? 与同伴进行交流。
- (2) 你能求出图2-28中左边抛物线的表达式吗?
- (3) 回顾本节课中两个问题的解法, 你能总结出此类问题的一般解法吗?

随堂练习

1. 如图, 一条隧道的截面由一段抛物线和一个矩形的三条边围成。矩形的长是8 m, 宽是2 m, 在如图所示的平面直角坐标系中, 抛物线可以用 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ 表示。

- (1) 一辆货运卡车高4 m, 宽2 m, 它能够通过该隧道吗?
- (2) 如果该隧道内的路面为双车道, 那么这辆货运卡车是否可以通过?



(第1题)

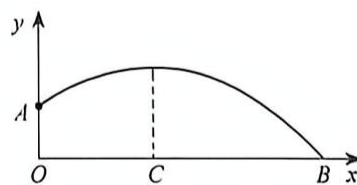
习题 2.5.3



问题解决

1. 如图, 一个运动员推铅球, 铅球在点A处出手, 出手时铅球距地面约 $\frac{5}{3}$ m;

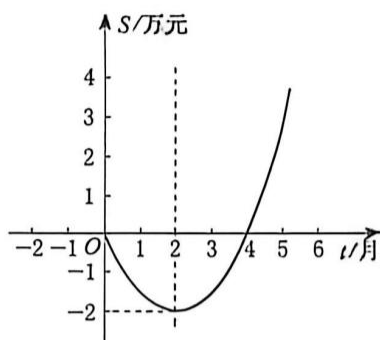
铅球落在点B处。铅球运行中在运动员前方4 m处(即 $OC = 4$ m)达到最高点, 最高点距地面的高度为3 m。已知铅球经过的路线是抛物线的一段, 根据图中的平面直角坐标系, 你能算出该运动员的成绩吗?



(第1题)

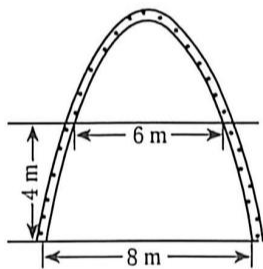


2. 某公司研发一种新的软件, 年初上市后, 该产品经历了从亏损到盈利的过程。如图所示的图象是抛物线的一段, 它刻画了该产品年初以来累积利润 S (单位: 万元) 与销售时间 t (单位: 月) 之间的关系 (即前 t 个月的利润总和 S 与 t 之间的关系)。根据图象提供的信息, 解答下列问题:

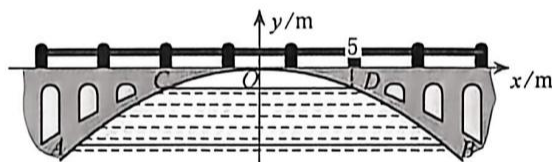


(第2题)

- (1) 由已知图象上三点的坐标, 求 S 与 t 之间的关系式;
 - (2) 截止到几月底该产品累积利润可达 30 万元?
 - (3) 预计 8 月份该产品所获的利润将达到多少万元?
3. 如图, 有一个抛物线形的水泥门洞。门洞的地面宽度为 8 m, 两侧距地面 4 m 高处各有一盏灯, 两灯间的水平距离为 6 m。求这个门洞的高度 (精确到 0.1 m)。



(第3题)



(第4题)

- ※4. 如图, 有一座抛物线形拱桥, 在正常水位时水面宽 $AB=20$ m, 当水位上升 3 m 时, 水面宽 $CD=10$ m。
- (1) 按如图所示的平面直角坐标系, 求此抛物线的函数表达式;
 - (2) 有一条船以 5 km/h 的速度向此桥径直驶来, 当船距离此桥 35 km 时, 桥下水位正好在 AB 处, 之后水位每小时上涨 0.25 m, 当水位达到 CD 处时, 将禁止船只通行。如果该船按原来的速度行驶, 那么它能否在水位达到 CD 前通过此桥?

6

二次函数与一元二次方程

我们已经知道, 竖直上抛物体运动的高度 h (单位: m) 与运动的时间 t (单位: s) 的关系可以近似地用公式 $h = -5t^2 + v_0t + h_0$ 表示, 其中 h_0 (单位: m) 是物体被抛出时的高度, v_0 (单位: m/s) 是物体被抛出时的速度。一个小球从地面被以 40 m/s 的速度竖直向上抛出, 小球运动的高度 h 与运动的时间 t 之间的关系如图 2-29 所示, 那么

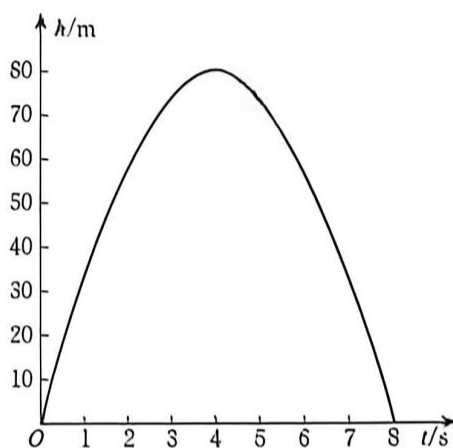


图 2-29

(1) h 与 t 的表达式是什么?

(2) 小球经过多少秒落地? 你有几种求解方法? 与同伴进行交流。

观察·思考

二次函数 $y = x^2 + 2x$, $y = x^2 - 2x + 1$, $y = x^2 - 2x + 2$ 的图象如图 2-30 所示。

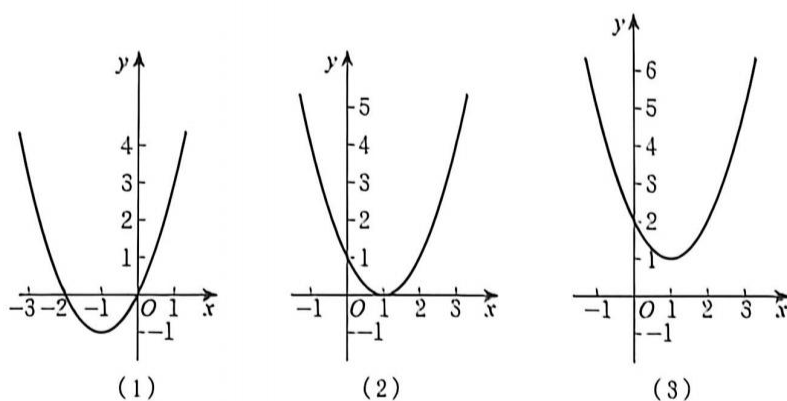


图 2-30

(1) 每个图象与 x 轴有几个交点?

(2) 一元二次方程 $x^2+2x=0$, $x^2-2x+1=0$, $x^2-2x+2=0$ 分别有几个实数根? 用根的判别式验证一下。

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的坐标和一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根有什么关系?

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点有三种情况: 有两个交点、有一个交点、没有交点。

当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有交点时, 交点的横坐标就是当 $y=0$ 时自变量 x 的值, 即一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根, 此时, 判别式 $\Delta=b^2-4ac \geq 0$ 。

当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴没有交点时, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根, 此时, 判别式 $\Delta=b^2-4ac < 0$ 。

思考·交流

在本节一开始的上抛小球问题中, 何时小球离地面的高度是 60 m? 你是如何知道的? 与同伴进行交流。

随堂练习

1. 一个小球被从地面向上弹出, 它的高度 h (单位: m) 可以用公式 $h=-4.9t^2+19.6t$ 来表示, 其中 t (单位: s) 表示小球被弹出后经过的时间。
 - (1) 画出函数 $h=-4.9t^2+19.6t$ 的图象。
 - (2) 小球被弹出后 1 s 时的高度是多少? 2 s 时呢?
 - (3) 方程 $-4.9t^2+19.6t=0$ 和 $-4.9t^2+19.6t=14.7$ 的根的实际意义分别是什么? 你能在图象上表示出来吗?
2. 二次函数 $y=x^2+bx-1$ 的图象与 x 轴相交吗? 如果相交, 有几个交点?



习题 2.6.1



知识技能

1. 求下列二次函数的图象与 x 轴的交点的坐标，并画草图验证：

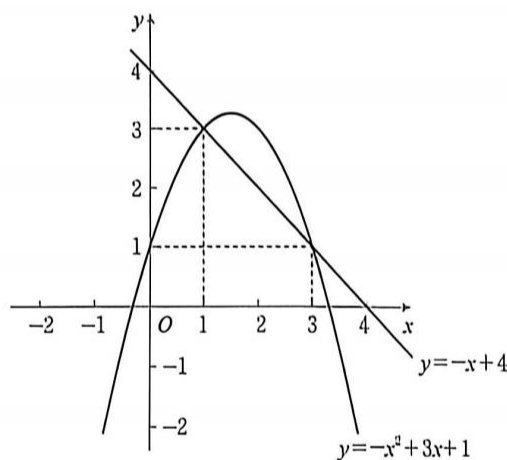
$$(1) y = \frac{1}{2}x^2 - x + 3;$$

$$(2) y = -2x^2 + 20x - 49.$$



联系拓广

2. 一元二次方程 $x^2 - 6x + 4 = 1$ 的根与二次函数 $y = x^2 - 6x + 4$ 的图象有什么关系？试把方程的根在图象上表示出来。
3. 已知二次函数 $y = -x^2 + 3x + 1$ 与一次函数 $y = -x + 4$ 的图象如图所示，方程 $-x^2 + 3x + 1 = -x + 4$ 有解吗？如果有，请直接写出；如果没有，请说明理由。



(第3题)

4. 二次函数 $y = -x^2 + 3x + 4$ 的图象与一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象相交吗？如果相交，请求出它们的交点坐标。



你能利用二次函数的图象估计一元二次方程 $x^2 + 2x - 10 = 0$ 的根吗?

图 2-31 是函数 $y = x^2 + 2x - 10$ 的图象。

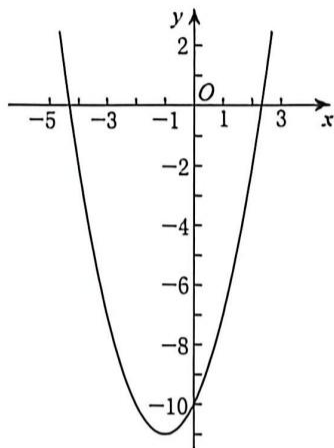


图 2-31

由图象可知方程有两个根，一个在 -5 和 -4 之间，另一个在 2 和 3 之间。

(1) 先求 -5 和 -4 之间的根。如图 2-32，利用计算器进行探索：

x	-4.1	-4.2	-4.3	-4.4
y	-1.39	-0.76	-0.11	0.56

因此， $x = -4.3$ 是方程的一个近似根^❶。

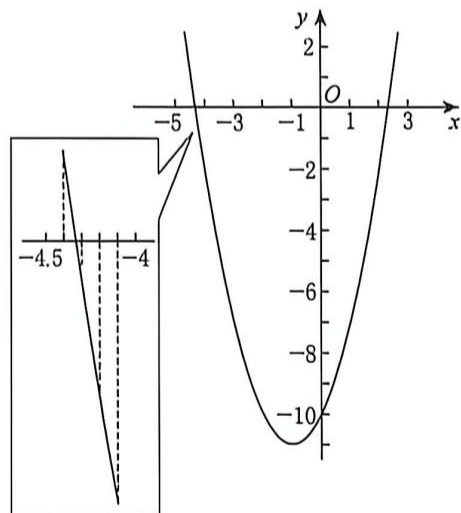


图 2-32

❶ 本书规定：用图象法求一元二次方程的近似根时，结果只取到十分位。

(2) 另一个根可以类似地求出 (如图 2-33):

x	2.1	2.2	2.3	2.4
y	-1.39	-0.76	-0.11	0.56

因此, $x=2.3$ 是方程的另一个近似根。

用一元二次方程的求根公式验证一下, 看是否有相同的结果。

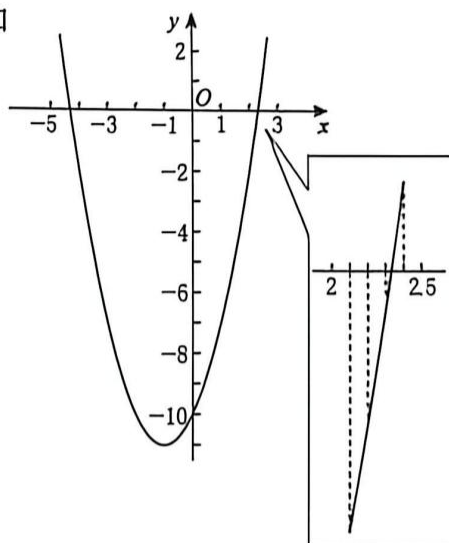


图 2-33

操作·思考

(1) 如何利用图 2-34 求一元二次方程 $x^2 + 2x - 10 = 3$ 的近似根? 你是怎么做的?

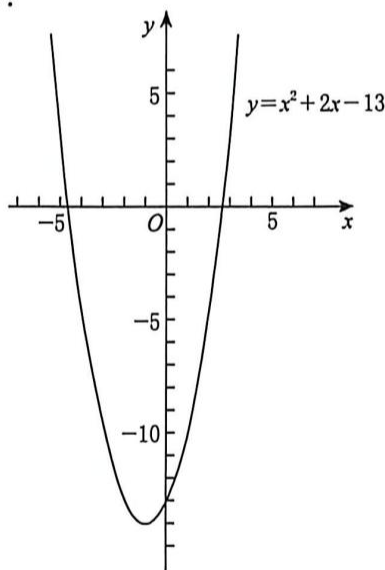


图 2-34

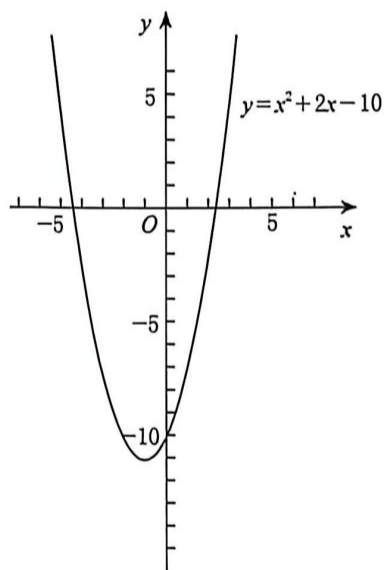


图 2-35

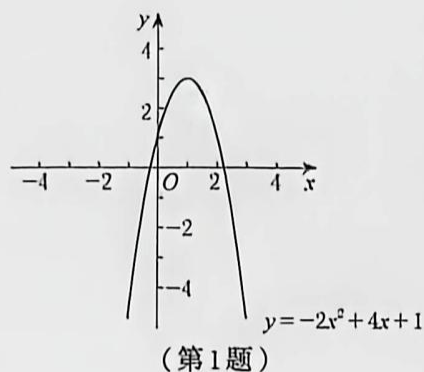
(2) 你还能利用图 2-35 求一元二次方程 $x^2 + 2x - 10 = 3$ 的近似根吗?

思考·交流

一次函数与二元一次方程的关系、二次函数与一元二次方程的关系, 这两者在研究内容和研究方法方面有什么异同? 与同伴进行交流。

课堂练习

1. 利用如图所示的二次函数的图象求一元二次方程 $-2x^2 + 4x + 1 = 0$ 的近似根。



习题 2.6.2

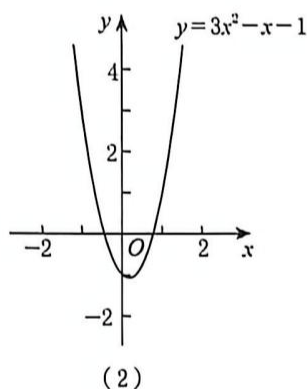
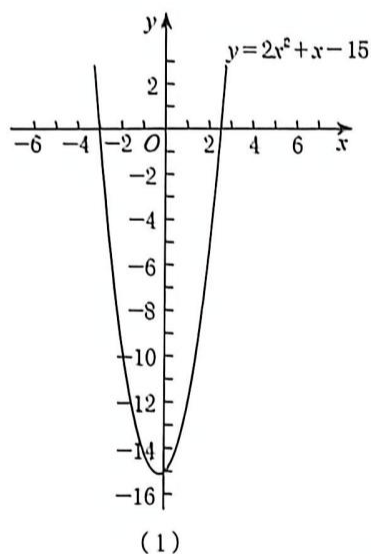


知识技能

1. 利用二次函数的图象求下列一元二次方程的近似根：

(1) $2x^2 + x - 15 = 0$;

(2) $3x^2 - x - 1 = 0$.



(第1题)



联系拓广

2. 利用二次函数 $y = 2x^2$ 的图象与一次函数 $y = x + 2$ 的图象，求一元二次方程 $2x^2 = x + 2$ 的近似根。



★ 问题解决活动：怎样围面积最大

问题 张伯伯想在房屋一侧的空地上，用篱笆和房屋的一面外墙围一个矩形鸭舍，其中篱笆长为 60 m。请你帮助张伯伯设计，使围成的鸭舍面积最大。

理解问题

- (1) 本题的目标是什么？已知条件有哪些？条件足够吗？
- (2) 用篱笆和房屋的一面外墙围矩形鸭舍有哪些可能情况？请画图表示。

拟订计划

- (1) 以前解决过类似的问题吗？关于最大值问题你有哪些经验？
- (2) 假设外墙足够长，怎样围鸭舍面积最大？由此你能得到什么结论？
- (3) 假设外墙很短，怎样围鸭舍面积最大？由此你能得到什么结论？
- (4) 还有什么情况需要研究？与同伴进行交流。

实施计划

根据外墙长度的不同，分别确定矩形鸭舍的围法，并说明道理。

回顾反思

- (1) 在探索这个问题的解决方案和实施方案的过程中，你获得了哪些经验？与同伴进行交流。
- (2) 在这个问题中，鸭舍面积与哪些因素有关？如果改变部分因素，你还能提出哪些新的研究问题？

习题

1. 在本节的问题中，如果外墙长为 20 m，那么怎样围能使矩形鸭舍的面积为 $200 \text{ m}^2 \sim 400 \text{ m}^2$ ？请画图说明。



回顾与思考

1. 举几个具体的例子, 深刻理解函数的概念。
2. 你在哪些情况下见到过抛物线的“身影”? 用语言或图形进行描述。
3. 你能用二次函数的知识解决哪些实际问题? 与同伴进行交流。
4. 举例说明画二次函数图象需要注意哪些问题。
5. 二次函数的图象有哪些性质? 如何确定它的开口方向、对称轴和顶点坐标? 请举例说明。
6. 如何确定二次函数的表达式? 请举例说明。
7. 请用自己的语言描述二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根之间的关系。
8. 梳理本章内容, 用适当的方式呈现全章知识结构, 并与同伴进行交流。

复习题

知识技能

1. 两个数的和为 6, 这两个数的积最大可以达到多少? 利用图象描述这两个数的积与因数之间的关系。
2. 确定下列二次函数图象的对称轴和顶点坐标:

(1) $y = 2 - 2x^2$;	(2) $y = -3(x - 1)^2 + 5$;
(3) $y = 4(x + 3)^2 - 1$;	(4) $y = x(5 - x)$;
(5) $y = 1 + 2x - x^2$;	(6) $y = 2x^2 - 7x + 12$ 。



3. 确定下列二次函数的图象与 x 轴的交点坐标, 并画草图验证:
- (1) $y = x^2 + 6x + 9$; (2) $y = 9 - 4x^2$;
 (3) $y = (x + 1)^2 - 9$.
4. 把一根长为 120 cm 的铁丝分成两段, 每一段均弯曲成一个正方形, 这两个正方形的面积之和最小是多少?
5. 物体的动能 E (单位: J) 与它的质量 m (单位: kg)、运动速度 v (单位: m/s) 之间的关系可以用公式 $E = \frac{1}{2}mv^2$ 表示。一辆小轿车的质量为 1 500 kg, 行驶速度为 10 m/s。设该车行驶速度增加 x m/s 时, 它的动能增加 y J。
- (1) 写出 y 与 x 之间的表达式;
- (2) 当该车行驶速度分别增加 5 m/s, 10 m/s, 20 m/s 时, 它的动能各增加多少?
6. 自由落体运动是物体只在重力作用下由静止开始下落的运动。地球上物体自由下落的时间 t (单位: s) 和下落的距离 h (单位: m) 的关系是 $h = 4.9t^2$ 。我们知道, 同一物体, 在月球上所受的重力大约是在地球上所受重力的 $\frac{1}{6}$, 因此, 月球上物体自由下落的时间 t (单位: s) 和下落的距离 h (单位: m) 的关系大约是 $h = 0.8t^2$ 。
- (1) 在同一平面直角坐标系中画图, 分别表示地球、月球上 h 与 t 之间的关系;
- (2) 比较物体下落 4 s 时, 在地球上和月球上分别下落的距离;
- (3) 比较物体下落 10 m 时, 在地球上和月球上分别所需要的时间 (结果精确到 0.1 s)。
7. 求二次函数 $y = x^2 - x - 5$ 的图象与一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象的交点坐标。请利用函数表达式、表格和图象三种方法求解。
8. 方程 $-x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$ 的根与二次函数 $y = -x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ 的图象之间有什么关系?
9. 利用二次函数的图象求下列一元二次方程的近似根:
- (1) $x^2 + 11x = 9$; (2) $x^2 + 3x = 20$;
 (3) $x^2 + 2x - 9 = 0$; (4) $x^2 + 3 = 3x$ 。

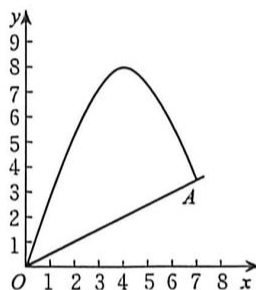


10. (1) 正方形的边长是 x , 面积是 A , 周长是 l , 分别写出 A, l 与 x 之间的函数表达式;
 (2) 在同一平面直角坐标系中画出上述表达式在 $x \geq 0$ 范围内的图象, 并比较它们的变化趋势。
11. 已知一个平行四边形的高与底边的比是 $h:a=2:5$, 用表达式表示这个平行四边形的面积 S 与它的底边 a 之间的关系, 并根据图象观察这个平行四边形的面积随着其底边的变化而变化的情况。



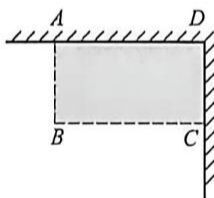
问题解决

12. 如图, 一小球从斜坡 O 点处抛出, 球的抛出路线可以用二次函数 $y = 4x - \frac{1}{2}x^2$ 刻画, 斜坡可以用一次函数 $y = \frac{1}{2}x$ 刻画。

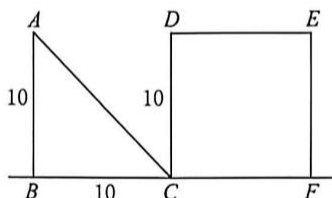


(第12题)

- (1) 求小球到达的最高点的坐标;
 (2) 小球的落点是 A , 求点 A 的坐标。
13. 如图, 用篱笆(虚线部分)在墙角围一个矩形, 已知篱笆的长度是 15 m , 如何围篱笆才能使其所围矩形 $ABCD$ 的面积最大? 最大面积是多少?



(第13题)



(第14题)

14. 如图(单位: m), 等腰直角三角形 ABC 在正方形 $CDEF$ 的左侧, 点 B, C, F 在一条直线上。现 $\triangle ABC$ 由如图所示的位置开始, 以 2 m/s 的速度沿直线 BF 从左向右运动(正方形 $CDEF$ 保持不动), 直到边 AB 与边 CD 重合。设运动 $x\text{ s}$ 时, $\triangle ABC$ 与正方形 $CDEF$ 重叠部分的面积为 $y\text{ m}^2$ 。
- (1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式;
 (2) 当 $x=2, 3.5$ 时, y 分别是多少?

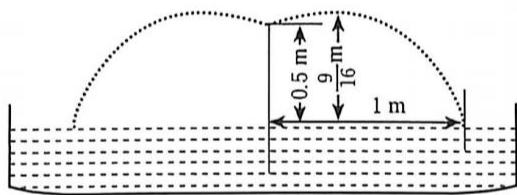


(3) 当重叠部分的面积是正方形 $CDEF$ 面积的一半时, $\triangle ABC$ 运动了多长时间?

15. 下表呈现了某竖直上抛物体运动的高度 h (单位: m) 与运动的时间 t (单位: s) 之间关系的部分数据:

t/s	1	5	10	15	20	25
h/m	155	635	1 010	1 135	1 010	635

- (1) 根据上表, 以时间 t 为横轴、高度 h 为纵轴建立平面直角坐标系, 并描出上述各点。
- (2) 你能根据第 (1) 题平面直角坐标系中各点的变化趋势确定 h 关于 t 的函数类型吗?
- (3) 你能确定 h 关于 t 的函数表达式吗?
- (4) 你能求出该物体运动的最大高度吗? 你是根据哪种表示方式求解的?
- ※16. 如图, 喷水池的喷水口位于水池中心, 到水面的距离为 0.5 m, 喷出的水流呈抛物线形状, 最高点离水面 $\frac{9}{16}$ m, 落水点离池中心 1 m。



(第 16 题)

请建立适当的平面直角坐标系, 用函数表达式描述左、右两边两条水流的形状, 并说明自变量的取值范围。

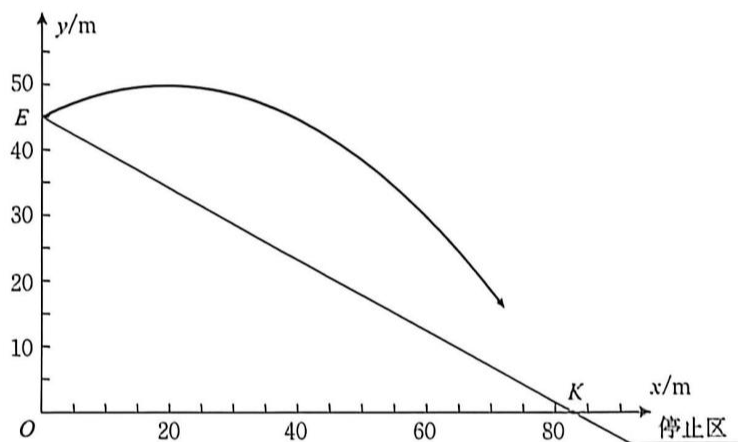
17. 把一个数 a 写成两数之和, 何时这两个加数的乘积最大? 你能得出一个一般性的结论吗?
18. 相框边的宽窄影响可放入相片的大小。如图, 相框的长为 26 cm, 宽为 22 cm, 相框边的宽度为 x cm, 相框内的面积为 y cm²。
- (1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式。
- (2) 画出这个函数的图象。
- (3) 当 $x=1, 1.5, 2$ 时, 分别可以放入多大的相片?



(第 18 题)

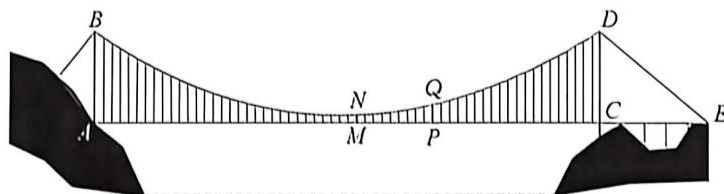


19. 竖直向上发射的物体运动的高度 h (单位: m) 满足表达式 $h = -5t^2 + v_0t$, 其中 t (单位: s) 是物体运动的时间, v_0 (单位: m/s) 是物体被发射时的速度。某公园计划设计园内喷泉, 喷水的最大高度要求达到 15 m, 那么喷水的速度应该达到多少 (结果精确到 0.01 m/s)?
20. 如图, 一位跳台滑雪运动员在一次训练中从起跳点起跳飞出, 在着陆坡着陆。已知起跳点 E 与着陆坡上的计分参照点 K 的垂直距离为 45 m, 水平距离为 83 m。按如图所示的平面直角坐标系, 这位运动员这次起跳后在空中的运动轨迹近似满足抛物线 $y = -\frac{1}{80}x^2 + \frac{1}{2}x + 45$ 。该运动员这次起跳后在空中飞行的最大高度是多少? 着陆时他能越过 K 点吗?



(第 20 题)

- ※21. 如图, 大桥的缆索具有抛物线形状, 两端的索塔均与桥面垂直, 且在桥面以上部分高度相同, 即 $AB = CD$ 。主桥 AC 长为 600 m, 缆索最低处的吊杆 MN 长为 3 m, 桥面上与点 M 相距 100 m 处的吊杆 PQ 长为 13 m。请建立适当的平面直角坐标系, 求索塔在桥面以上部分的高度。



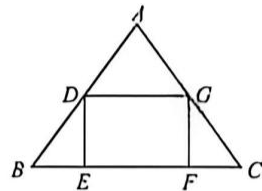
(第 21 题)





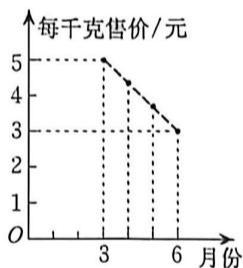
联系拓广

22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10$, $BC=12$ 。在 $\triangle ABC$ 的内部作一个矩形 $DEFG$, 其中点 D, G 分别在 AB 和 AC 边上, EF 在 BC 边上。设 $EF=x$, 矩形 $DEFG$ 的面积为 y , 写出 y 与 x 之间的函数表达式, 列出表格, 并画出相应的函数图象。根据三种表示方法回答下列问题:

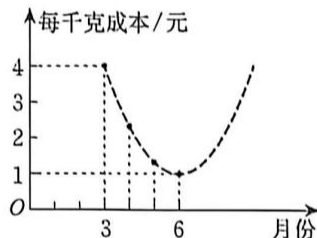


(第 22 题)

- (1) 自变量 x 的取值范围是什么?
 - (2) 图象的对称轴和顶点坐标分别是什么?
 - (3) 你能描述 y 随着 x 的变化而变化的情况吗?
23. 某种蔬菜的每千克售价与销售月份之间的关系如图 (1) 所示, 每千克成本与销售月份之间的关系如图 (2) 所示 [图 (1) 中的图象是线段, 图 (2) 中的图象是抛物线]。哪个月出售这种蔬菜每千克的收益最大 (收益 = 售价 - 成本)?



(1)



(2)

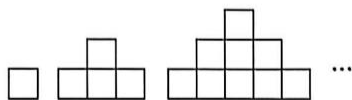
(第 23 题)

- ※24. (1) 如图, 第 n 个图形中有多少个小正方形? 你是如何计算的?

- (2) 求 $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7$,

$$1+3+5+7+9, \dots,$$

$$1+3+5+7+9+\dots+(2n-1)。$$

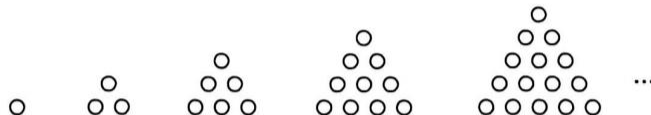


(第 24 题)



※25. (1) 下面每一个图形中各有多少个小圆圈?

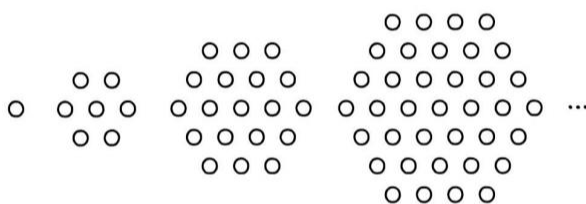
(2) 如果用 n 表示等边三角形一条边上的小圆圈数, m 表示这个三角形中小圆圈的总数, 那么 m 和 n 的关系是什么?



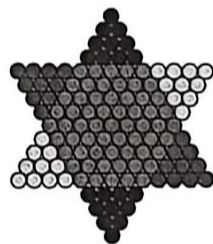
(第25题)

※26. (1) 下面每一个图形中各有多少个小圆圈? 第5个图形中应该有多少个小圆圈? 为什么?

(2) 如果用 n 表示六边形一条边上的小圆圈数, m 表示这个六边形中小圆圈的总数, 那么 m 和 n 的关系是什么?



(第26题)



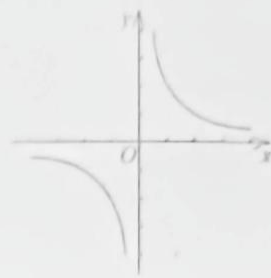
(第27题)

※27. 求如图所示的图形中小圆圈的总数。

28. 以“身边的二次函数”为主题, 写一篇小短文, 并与同伴分享。



第三章 反比例函数



当人和木板对地面的压力一定时，随着木板面积的变化，人和木板对地面的压强将如何变化？亮度可以调节的台灯，当电压一定时，怎样通过调节电阻来控制电流的变化，从而改变灯光的明暗？……其中的数量关系具有怎样的共同特征？

本章将从具体情境中抽象出反比例函数的概念，探究反比例函数的图象与性质，用反比例函数解决实际问题。在这一过程中，你将进一步感受几何直观对研究函数性质的作用，体会反比例函数是刻画变量之间关系的重要模型，不断发展抽象能力、模型观念和应用意识。

💡 在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：

- ◎ 反比例函数刻画的两个变量之间的关系具有哪些特征？
- ◎ 反比例函数与之前学习的函数在研究过程和研究方法上有哪些异同？



1

认识反比例函数

1. 亮度可以调节的台灯, 其灯光亮度的调节, 可以通过电阻的变化控制电流的变化来实现。其中, 导体中的电流 I (单位: A) 与导体的电阻 R (单位: Ω)、导体两端的电压 U (单位: V) 之间满足关系式 $U=IR$ 。

(1) 当 $U=220$ V 时, 请完成下表, 并思考随着 R 的变化 I 是怎样变化的。

R/Ω	20	40	60	80	100
I/A					

(2) 在 (1) 中, 变量 I 是变量 R 的函数吗? 为什么?

2. 一种交通工具行驶的路程 s (单位: km) 与它行驶的平均速度 v (单位: km/h)、行驶的时间 t (单位: h) 之间满足关系式 $s=vt$ 。

(1) 当 $s=100$ km 时, 请完成下表, 并思考随着 v 的变化 t 是怎样变化的。

$v/(km/h)$	40	50	60	70	80
t/h					

(2) 在 (1) 中, 变量 t 是变量 v 的函数吗? 为什么?

尝试·思考

在上述问题中, 变量 I 与变量 R 、变量 t 与变量 v 之间的关系具有什么共同特征? 你能再举一些类似的例子吗?

在上述问题中, 变量 I 与变量 R 在变化过程中, 它们的乘积不变, 我们就说变量 I 与 R 具有反比例关系。类似地, 变量 t 与 v 也具有反比例关系。

显然, 具有反比例关系的变量 I 与 R 之间的关系可以表示成 $I=\frac{220}{R}$, 具有反比例关系的变量 t 与 v 之间的关系可以表示成 $t=\frac{100}{v}$ 。



一般地,如果两个变量 x, y 之间的对应关系可以表示成 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$)的形式,那么称 y 是 x 的反比例函数。反比例函数的自变量 x 不能为0。

思考·交流

思考以下问题,并与同伴进行交流。

1. 一个矩形的面积为 20 cm^2 , 相邻的两条边长分别为 $x \text{ cm}$ 和 $y \text{ cm}$, 你认为变量 y 是变量 x 的函数吗? 如果是函数, 那么 y 是 x 的反比例函数吗? 为什么?

2. 某村有耕地 346.2 公顷, 人口数量 n 逐年发生变化, 你认为该村人均占有耕地面积 m (单位: 公顷/人) 是全村人口数 n 的函数吗? 如果是函数, 那么 m 是 n 的反比例函数吗? 为什么?

3. y 是 x 的反比例函数, 下表给出了 x 与 y 的一些值。

x		-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		3
y	$\frac{2}{3}$		2				-1	

(1) 写出这个反比例函数的表达式;

(2) 根据函数表达式完成上表。

上述问题
中, 自变量能
取哪些值?

例1 已知 y 是 x 的反比例函数, 当 $x = -3$ 时, $y = 4$ 。

(1) 写出这个反比例函数的表达式;

(2) 求当 $x = 6$ 时 y 的值。

解: (1) 设这个反比例函数的表达式为 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$),

因为当 $x = -3$ 时, $y = 4$,

所以有 $4 = \frac{k}{-3}$,

$k = -12$ 。

所以, 这个反比例函数的表达式为 $y = -\frac{12}{x}$ 。



(2) 把 $x=6$ 代入 $y=-\frac{12}{x}$, 得

$$y=-\frac{12}{6}=-2。$$

回顾·反思

反比例函数和正比例函数有哪些异同?

随堂练习

1. 在下列函数表达式中, x 均表示自变量, 那么哪些是反比例函数? 每一个反比例函数相应的 k 值是多少?

(1) $y=\frac{5}{x}$;

(2) $y=\frac{0.4}{x}$;

(3) $y=\frac{x}{2}$;

(4) $xy=-2。$

2. 你能举出两个反比例函数的实例吗? 写出函数表达式, 并与同伴进行交流。

习题 3.1.1

知识技能

1. 用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系, 并指出是不是反比例函数。

(1) 计划修铁路 1 000 km, 铺轨天数 y (单位: d) 与每日平均铺轨量 x (单位: km/d) 的关系;

(2) 三角形面积 S 一定时, 它的一条边长 y 与这条边上的高 x 的关系。

2. 下列哪些式子表示 y 是 x 的反比例函数? 为什么?

(1) $xy=-\frac{1}{3}$;

(2) $y=5-x$;

(3) $y=-\frac{2}{5x}$;

(4) $y=\frac{2a}{x}$ (a 为常数, $a \neq 0$)。

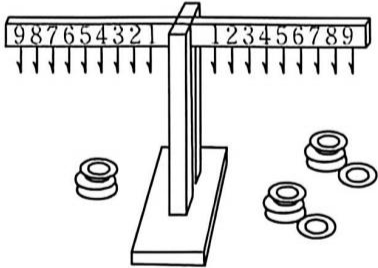
3. 用电器的电流 I (单位: A)、电阻 R (单位: Ω)、电功率 P (单位: W) 之间满足关系式 $P=I^2R$ 。已知 $P=5\text{ W}$, 填写下表并回答问题。

I/A	1	2	3	4	5	6	7	8
R/Ω								

- (1) 变量 R 是变量 I 的函数吗? 为什么?
- (2) 变量 R 是变量 I 的反比例函数吗? 为什么?

 问题解决

4. 根据物理学知识, 一定质量的理想气体, 当温度保持不变时, 它的压强 p 是体积 V 的反比例函数。
- (1) 写出这个函数的表达式;
 - (2) 某气球内充满了一定质量的理想气体, 若将该气球的体积压缩到原来的 $\frac{1}{4}$, 则气球内气体的压强将发生怎样的变化?
5. 如图, 某平衡杆的横杆上标有均匀的刻度, 将若干相同型号的铁圈分别挂在横杆左、右两侧适当位置的刻度下, 便可使横杆平衡 (横杆自重忽略不计)。
- (1) 如果左侧刻度 “6” 下面挂有 4 个铁圈, 那么要想使横杆平衡, 可以在右侧如何挂铁圈? 你有几种方法?
 - (2) 如果在右侧刻度 “ y ” 下面挂 x 个铁圈后横杆平衡, 那么 y 与 x 之间有什么样的关系?



(第5题)

2

反比例函数的图象与性质

学习了反比例函数的概念后，你一定想研究反比例函数的图象。反比例函数的图象会是什么样子呢？

尝试·思考

画反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象。

(1) 观察表达式 $y = \frac{4}{x}$ ，你认为 x 可以取哪些值？

(2) 选择适当的 x 值，并计算相应的 y 值，完成下表：

x													
$y = \frac{4}{x}$													

(3) 在平面直角坐标系中描点。如果需要，可多描一些点。你认为图象可能会是什么样子？与同伴进行交流。

思考·交流

在画反比例函数的图象时，要用光滑的曲线分别顺次连接横坐标为负数的点及横坐标为正数的点，各得到图象的一个分支，这两个分支合起来就是反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象，如图 3-1 所示。

你认为画反比例函数图象时应注意哪些问题？与同伴进行交流。

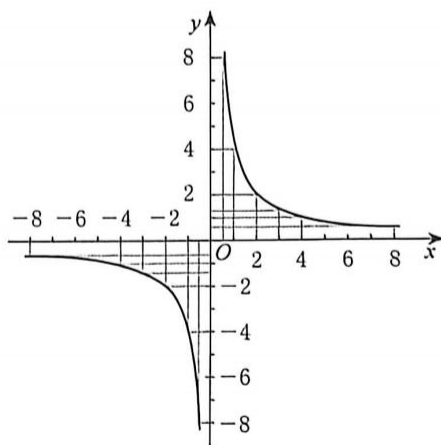


图 3-1



操作·思考

(1) 在图 3-2 的平面直角坐标系中画出反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图象。

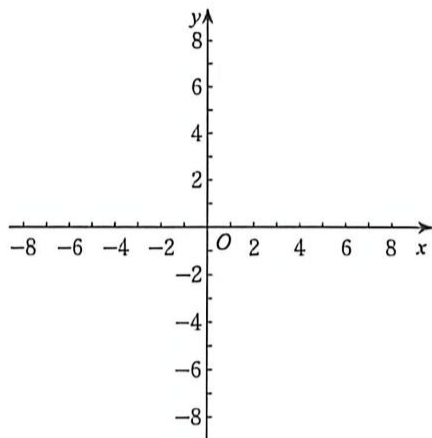


图 3-2

(2) 观察反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 和 $y = -\frac{4}{x}$ 的图象，它们有什么相同之处和不同之处？

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象是由两支曲线组成的^❶。当 $k > 0$ 时，两支曲线分别位于第一、三象限内；当 $k < 0$ 时，两支曲线分别位于第二、四象限内。

观察·思考

- (1) 反比例函数的图象是中心对称图形吗？如果是，请指出它的对称中心。
- (2) 反比例函数的图象是轴对称图形吗？如果是，请指出它的对称轴。

^❶ 这两支曲线通常称为双曲线。



例1 如图 3-3 是反比例函数 $y = \frac{m-6}{x}$ 的图象的一支。

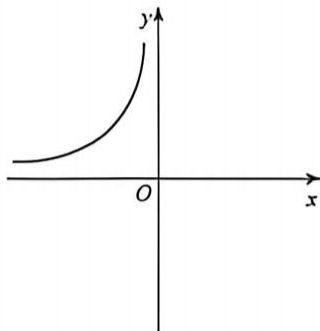


图 3-3

(1) 图象的另一支位于哪个象限？常数 m 的取值范围是什么？

(2) 若图象经过点 $(-2, 6)$ ，判断点 $A(-3, 4)$ ， $B(8, -\frac{3}{2})$ ， $C(4, -4)$ 是否在这个函数的图象上。

解：(1) 反比例函数的图象只有两种可能，即位于第一、三象限，或者位于第二、四象限，又因为这个函数的图象的一支位于第二象限，则另一支必位于第四象限。

因为这个函数的图象位于第二、四象限，所以

$$m-6 < 0,$$

解得

$$m < 6.$$

(2) 因为函数 $y = \frac{m-6}{x}$ 的图象经过点 $(-2, 6)$ ，所以

$$6 = \frac{m-6}{-2},$$

即

$$m-6 = -12.$$

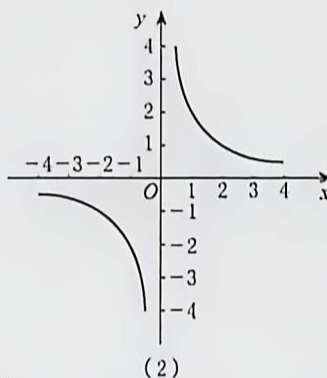
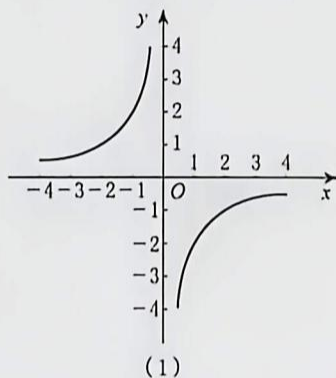
因此，这个反比例函数的表达式为

$$y = -\frac{12}{x}.$$

分别把点 A ， B ， C 的坐标代入 $y = -\frac{12}{x}$ ，可得点 A ， B 的坐标满足表达式，点 C 的坐标不满足表达式。所以点 A ， B 在函数 $y = -\frac{12}{x}$ 的图象上，点 C 不在函数 $y = -\frac{12}{x}$ 的图象上。

随堂练习

1. 下图给出了反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 和 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象, 你知道哪一个是 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象吗? 为什么?



(第1题)

2. 现有1张100元的人民币, 把它换成50元的等值人民币, 可以得到几张? 把它分别换成20元、10元、5元或1元的, 又可以得到几张相应的人民币?

(1) 请将上述思考填写在下表:

换成的每张面值 x /元	50	20	10	5	1
换成的张数 y /张					

(2) y 与 x 之间是函数关系吗? 是反比例函数关系吗?

(3) 画出表示 y 与 x 之间关系的图象, 观察图象有什么特征。

习题 3.2.1

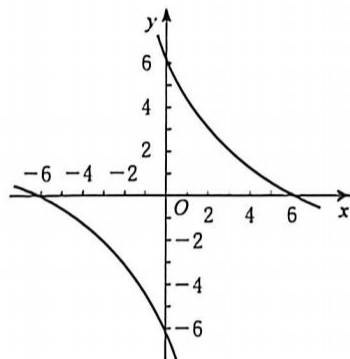


知识技能

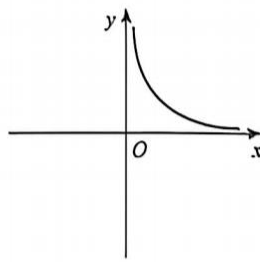
1. 分别画出函数 $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象。



2. 小华画的反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象如图所示, 你认为他画得对吗? 反比例函数的图象可能与 x 轴相交吗? 可能与 y 轴相交吗? 请说明理由。



(第2题)



(第3题)

3. 如图, 已知反比例函数 $y = \frac{n+1}{x}$ 的图象的一支位于第一象限。

(1) 图象的另一支位于哪个象限?

(2) 常数 n 的取值范围是什么?



联系拓广

4. 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = \frac{2}{x}$ 与函数 $y = x - 1$ 的图象, 并利用图象求它们的交点坐标。

观察反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = \frac{6}{x}$ 的图象 (如图 3-4), 回答下列问题:

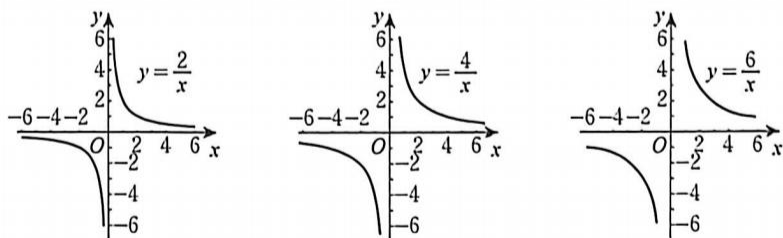


图 3-4

- (1) 函数图象分别位于哪几个象限内?



(2) 在图象所在的每一个象限内, 随着 x 值的增大, y 的值是怎样变化的? 你能说明这是为什么吗?

观察·思考

当 $k=-2, -4, -6$ 时, 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象如图 3-5, 它们有哪些共同特征?

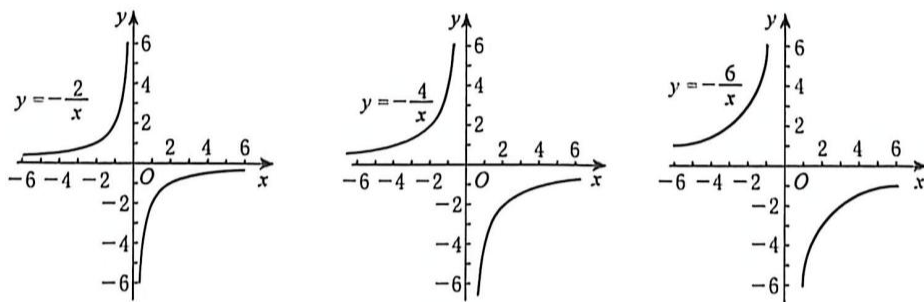


图 3-5

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象, 当 $k>0$ 时, 在每一象限内, y 的值随着 x 值的增大而减小; 当 $k<0$ 时, 在每一象限内, y 的值随着 x 值的增大而增大。

当 x 值的绝对值无限增大时, 反比例函数图象的两个分支都无限接近 x 轴; 当 x 值的绝对值无限接近于零时, 反比例函数图象的两个分支都无限接近 y 轴。但永远不会与 x 轴和 y 轴相交。

例2 若反比例函数的图象经过点 $A(-3, 6)$ 。

(1) 求这个反比例函数的表达式;

(2) 在这个函数的图象上任取点 $A(a, m)$ 和点 $B(b, n)$, 若 $a>b>0$, 那么 m 和 n 有怎样的大小关系?

解: (1) 设反比例函数的表达式为

$$y=\frac{k}{x}。$$



将 $A(-3, 6)$ 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 中, 得

$$6 = \frac{k}{-3},$$

解得 $k = -18$ 。

所以这个反比例函数的表达式为

$$y = -\frac{18}{x}。$$

(2) 因为 $k < 0$,

所以在每一象限内, y 的值随着 x 值的增大而增大。

又 $a > b > 0$,

所以 $m > n$ 。

思考·交流

若把例 2 中的条件 “ $a > b > 0$ ” 改为条件 “ $a < b < 0$ ” 或 “ $a > 0 > b$ ”, 则 m 与 n 的关系又如何? 与同伴进行交流。

操作·思考

在一个反比例函数图象上任取两点 P, Q 。过点 P 分别作 x 轴、 y 轴的平行线, 与坐标轴围成的矩形面积为 S_1 ; 过点 Q 分别作 x 轴、 y 轴的平行线, 与坐标轴围成的矩形面积为 S_2 。 S_1 与 S_2 有什么关系? 为什么?

回顾·反思

回顾一次函数、二次函数、反比例函数图象和性质的学习, 你积累了哪些经验?

随堂练习

- (1) 已知点 $(-6, y_1), (-4, y_2)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上, 试比较 y_1 与 y_2 的大小。你是怎么做的?



(2) 已知点 $(4, y_3)$, $(6, y_4)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上, 试比较 y_3 与 y_4 的大小。

(3) 已知点 $(-4, y_5)$, $(6, y_6)$ 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上, 试比较 y_5 与 y_6 的大小。

2. 下列函数中, 图象位于第一、三象限的有 _____; 在图象所在象限内, y 的值随着 x 值的增大而增大的有 _____。

(1) $y = \frac{1}{2x}$;

(2) $y = \frac{0.3}{x}$;

(3) $y = \frac{10}{x}$;

(4) $y = -\frac{7}{100x}$ 。

阅读·思考

阿基米德能撬动地球吗?

阿基米德 (Archimedes, 约前287—前212) 是古希腊力学家和数学家。他曾经说过: “假如给我一个支点, 我就能撬动地球。” 其中用到的就是杠杆原理, 即杠杆平衡时 “动力 $\times$ 动力臂 = 阻力 $\times$ 阻力臂”, 通常用 $F_1 l_1 = F_2 l_2$ 来表示 (如图3-6)。如果阻力和阻力臂的乘积是常数, 那么动力和动力臂就成反比例关系。这意味着, 只要动力臂足够长, 就可以 “以小博大” 了。利用杠杆原理可以解释, 为什么使用起子、扳手等工具常常会感到省力。

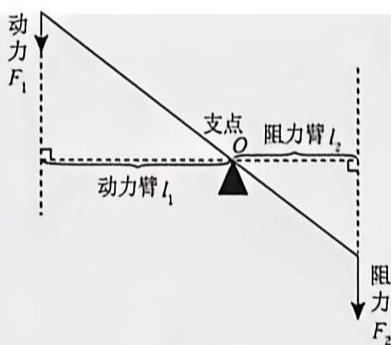


图3-6

设想一下, 果真有足够牢固的支点, 阿基米德能撬动地球吗? 我们不妨来估算一下。地球质量约为 6×10^{24} kg, 假如阻力臂是 10^{-3} m, 阿基米德体重为 60 kg, 那么动力臂需要多长? 按照 100 km/h 的速度不间断开车, 走完这样长的路程大约需要多少年?

习题 3.2.2



知识技能

1. 下列函数中, 图象位于第二、四象限的有 _____; 在图象所在象限内, y 的值随着 x 值的增大而减小的有 _____。

$$(1) y = \frac{2}{3x};$$

$$(2) y = \frac{0.1}{x};$$

$$(3) y = \frac{5}{x};$$

$$(4) y = -\frac{2}{75x}.$$

2. 已知点 $P(3, 2)$, $Q(-2, a)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上。过点 P 分别作两坐标轴的垂线, 垂线与两坐标轴围成的矩形面积为 S_1 ; 过点 Q 分别作两坐标轴的垂线, 垂线与两坐标轴围成的矩形面积为 S_2 。求 a , S_1 , S_2 的值。

3. 将反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = \frac{6}{x}$ 的图象画在同一平面直角坐标系中, 你有什么新的发现?



联系拓广

- ※4. (1) 已知点 $(2, y_1)$, $(1, y_2)$, $(-1, y_3)$, $(-2, y_4)$ 都在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上, 比较 y_1, y_2, y_3, y_4 的大小;
(2) 已知点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 都在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上, 且 $x_1 > x_2$, 比较 y_1 与 y_2 的大小。
5. 已知点 $A(-2, y_1)$, $B(-1, y_2)$ 和 $C(3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上, 比较 y_1, y_2, y_3 的大小。
6. 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = -\frac{2}{x}$ 与函数 $y = x + 3$ 的图象, 并利用图象求它们的交点坐标。



3

反比例函数的应用

如图 3-7，某校科技小组在专业人员的带领下进行野外考察，利用铺垫木板的方式通过了一片淤泥地，你能解释他们这样做的道理吗？当人和木板对地面的压力一定时，随着木板面积 S （单位： m^2 ）的变化，人和木板对地面的压强 p （单位： Pa ）将如何变化？



图 3-7

已知人和木板对地面的压力合计 600 N 。

(1) 用含 S 的代数式表示 p ， p 是 S 的反比例函数吗？为什么？

(2) 当木板面积为 0.2 m^2 时，人和木板对地面的压强是多少？

(3) 如果要求人和木板对地面的压强不超过 $6\,000\text{ Pa}$ ，木板面积至少要多大？

(4) 在图 3-8 中画出相应的函数图象。

(5) 请利用图象对 (2) 和 (3) 作出直观解释，并与同伴进行交流。

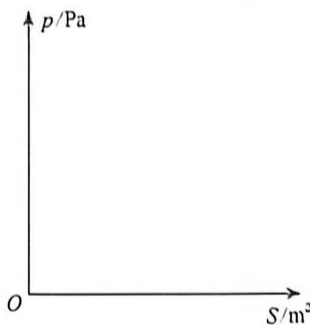


图 3-8



例1 某蓄电池两端的电压为定值。

使用该电源时，通过用电器的电流 I （单位：A）与电阻 R （单位： Ω ）之间的函数关系如图 3-9 所示。

（1）请写出这个函数的表达式。

（2）某用电器以该蓄电池为电源，若通过这个用电器的电流不得超过 10 A，则该用电器的可变电阻应控制在什么范围内？

解：（1）根据欧姆定律可知，当蓄电池的电压一定时， I 是 R 的反比例函数。

因为点 $A(9, 4)$ 在这个函数的图象上，即当 $R=9\ \Omega$ 时， $I=4\text{ A}$ ，所以电压 $U=IR=36$ ，电流 I 与电阻 R 之间的函数表达式为 $I=\frac{36}{R}$ 。

（2）根据题意，得 $I \leq 10$ ，即 $\frac{36}{R} \leq 10$ ，解得 $R \geq 3.6$ 。

因此，该用电器的可变电阻应不小于 $3.6\ \Omega$ 。

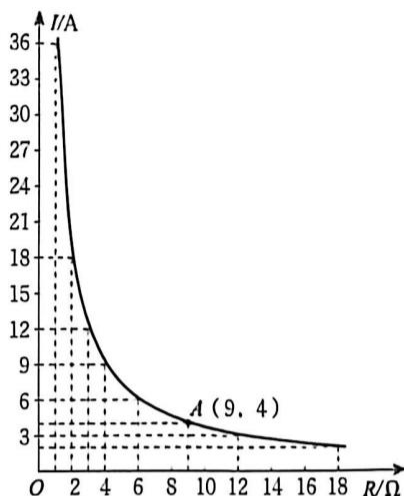


图 3-9

思考·交流

如图 3-10，正比例函数 $y=k_1x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A, B 两点，其中点 A 的坐标是 $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 。

（1）写出这两个函数的表达式；

（2）你能求出点 B 的坐标吗？你是怎样求的？与同伴进行交流。

（3）请根据图象直接写出不等式 $k_1x \geq \frac{k_2}{x}$ 的解集。

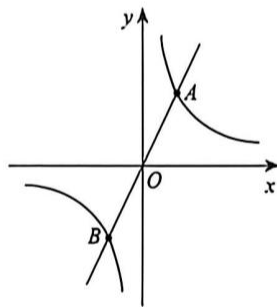


图 3-10

回顾·反思

研究反比例函数的方法与以前研究其他函数的方法有哪些异同？对一类函数的研究一般会经历怎样的过程？



随堂练习

1. 某蓄水池原有排水管的排水速度是 $8 \text{ m}^3/\text{h}$, 6 h 可将满池水全部排空。现准备增加排水管。

(1) 写出增加排水管后, 将满池水全部排空所需的时间 t (单位: h) 与排水速度 Q (单位: m^3/h) 之间的表达式。

(2) 如果要在 5 h 内将满池水全部排空, 那么排水速度至少为多少?

(3) 如果该蓄水池的最大排水速度为 $12 \text{ m}^3/\text{h}$, 那么最少多长时间可将满池水全部排空?

阅读·欣赏

走近函数大家庭

我们已经学过一次函数、二次函数和反比例函数。在这些函数中, 对于自变量 x 的每一个确定的值, 因变量 y 有几个值与它对应?

假设在一个变化过程中有两个变量 x, y , 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值与它对应, 那么就说变量 y 是变量 x 的函数, x 叫作自变量。

除了一次函数、二次函数和反比例函数, 在函数大家庭里还有许多其他成员。

例如, 函数 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ ($a > 0, e = 2.718\ 281\ 8\cdots$), 尽管它的面孔陌生, 但是它的图象就是我们所熟悉的那种下垂的高压输电线的形状 (如图 3-11)。

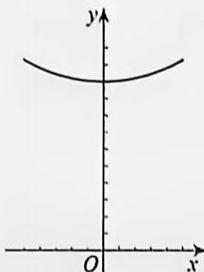
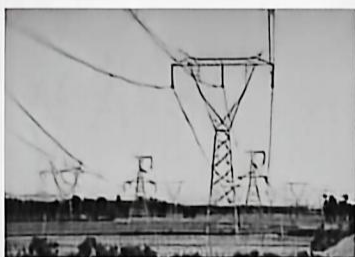


图 3-11



又如，图 3-12 至 3-14 的脑电波图，也许你觉得它们杂乱无章，但是对于一个临床医生来说，它们却是判断脑部是否异常的重要依据。脑细胞活动时会产生生物电流，脑电波图反映了生物电流随人脑活动的变化而变化的情况。

请你查阅资料，了解函数图象在医学诊疗中的更多应用。



精神稳定时的脑电波

图 3-12



精神紧张时的脑电波

图 3-13



急性脑炎患者的脑电波

图 3-14

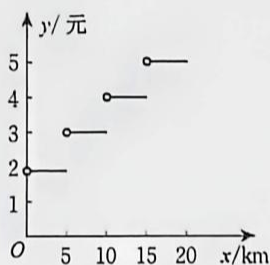


图 3-15

除了反比例函数，还有一些函数，它们的图象不是连续的，如某种公共汽车票价与乘坐距离之间关系的图象（图 3-15）。结合乘车购票的经验，相信你一定能读懂它。

习题 3.3.1



知识技能

- 反比例函数的图象经过点 $A(2, 3)$ ，那么点 $B(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ ， $C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ， $D(9, \frac{2}{3})$ 是否在该函数的图象上？

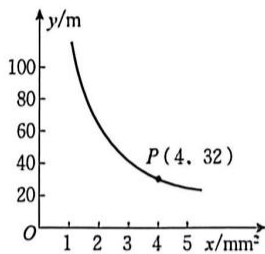


问题解决

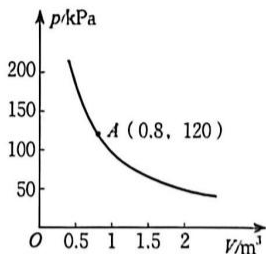
- 拉面师傅将一定体积的面团拉成拉面条，面条的总长度 y （单位：m）可以看成面条横截面面积 x （单位： mm^2 ）的反比例函数，其图象如图所示。
(1) 写出这个函数的表达式；



(2) 当面条横截面面积为 1.6 mm^2 时, 面条的总长度是多少?



(第2题)



(第3题)

3. 某气球内充满了一定质量的理想气体, 当温度不变时, 气球内气体的压强 p (单位: kPa) 是气体体积 V (单位: m^3) 的反比例函数, 其图象如图所示.
 - (1) 写出这个函数的表达式;
 - (2) 当该气球内气体的体积为 1 m^3 时, 气体的压强是多少?
 - (3) 当该气球内气体的压强大于 140 kPa 时, 气球将爆炸. 为安全起见, 该气球内气体的体积应不小于多少?
4. 人的视觉机能受运动速度的影响很大. 车辆行驶中司机在驾驶室内观察到的前方物体是动态的, 车速增加时眼睛所能看到的范围 (即视野) 会变小. 如果某人的视野 f (单位: 度) 是车速 v (单位: km/h) 的反比例函数, 且当车速为 80 km/h 时他的视野为 50 度, 那么当车速为 100 km/h 时, 这个人的视野是多少度?



联系拓广

5. 已知正比例函数 $y = k_1x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图象的一个交点是 $(1, 3)$.
 - (1) 写出这两个函数的表达式, 并确定这两个函数图象的另一个交点的坐标;
 - ※(2) 画出这两个函数图象的草图, 并据此写出使反比例函数值大于正比例函数值的 x 的取值范围.



回顾与思考



1. 你能举出现实生活中有关反比例函数的几个实例吗?
2. 说说反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 与 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象的联系和区别。
3. 你能总结一下反比例函数的图象的特征吗? 与同伴进行交流。
4. 反比例函数与正比例函数有哪些异同?
5. 你能用反比例函数的知识解决有关问题吗? 请举例说明。
6. 梳理本章内容, 用适当的方式呈现全章知识结构, 并与同伴进行交流。
7. 回顾初中阶段学习过的函数、方程(方程组)以及不等式, 你对它们之间的联系有什么感悟? 请举例说明, 并与同伴进行交流。

复习题

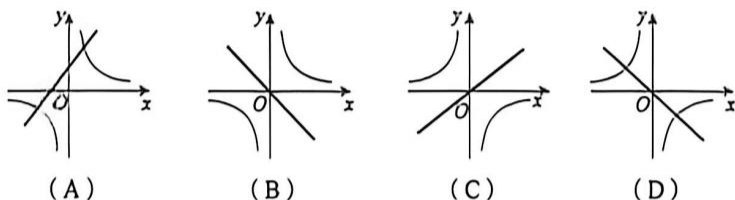


知识技能

1. 已知点 $(23, -3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上, 那么 $k =$ _____, 该反比例函数的图象位于第 _____ 象限。
2. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(32, 3)$, 那么点 $(2, 23)$ 是否在该反比例函数的图象上? 为什么?
3. 已知反比例函数 $y = \frac{m+1}{x}$ 的图象具有下列特征: 在所在象限内, y 的值随着 x 值的增大而增大, 那么 m 的取值范围是 _____。
4. 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-2, \sqrt{2})$, 那么直线 $y = (k-1)x$ 一定经过点 $(2, \quad)$ 。
5. 考察函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象, 当 $x = -2$ 时, $y =$ _____; 当 $x < -2$ 时, y 的取值范围是 _____; 当 $y \geq -1$ 时, x 的取值范围是 _____。

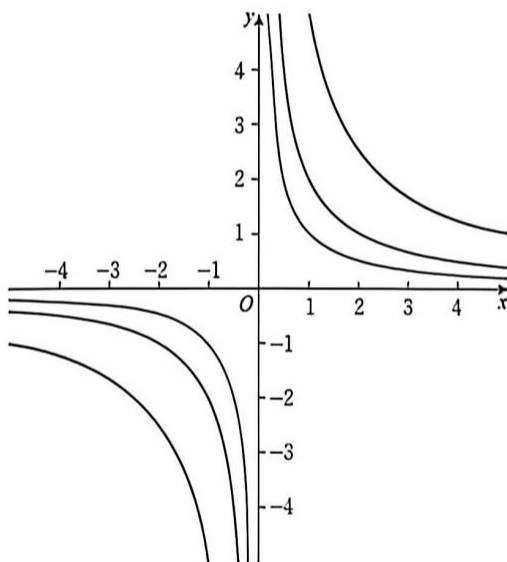


6. 函数 $y=kx$ 与 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 在同一平面直角坐标系中的图象可能是 ()。



(第6题)

7. 函数① $y=\frac{1}{x}$, ② $y=\frac{2}{x}$, ③ $y=\frac{5}{x}$ 的图象如图所示, 请在图上标注对应函数表达式的编号。



(第7题)

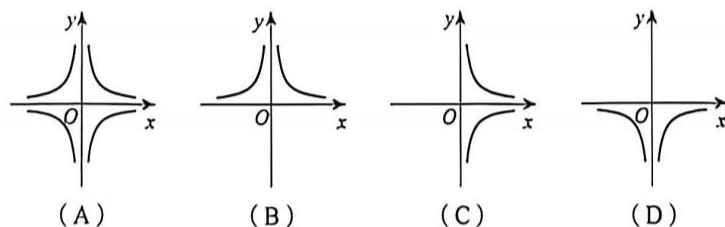


联系拓广

8. 已知正比例函数 $y=ax$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{6-a}{x}$ 的图象有一个交点的横坐标是1, 求它们两个交点的坐标。
9. 在同一平面直角坐标系中, 正比例函数 $y=k_1x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象没有公共点, 则 k_1k_2 _____ 0。



※10. 表示表达式① $|y| = \frac{1}{x}$, ② $y = \frac{1}{|x|}$, ③ $y = -\frac{1}{|x|}$, ④ $|y| = \frac{1}{|x|}$ 的图象依次是 _____, _____, _____, _____。



(第10题)

※11. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象与反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象相交于 $A(-1, m)$, $B(n, -1)$ 两点。

(1) 写出这个一次函数的表达式;

(2) 画出函数图象草图, 并据此写出使一次函数值大于反比例函数值的 x 的取值范围。

12. 结合函数的学习经验, 撰写一篇小短文, 谈谈你对函数研究方法的感悟。



第四章

投影与视图

影子在日常生活中随处可见，白天的阳光下、夜晚的路灯下都能看到物体的影子，很多时候，相同物体的影子形状却不同。哪些因素会影响影子的形状？如何用数学的眼光看待影子呢？六年级学习的从三个方向看物体的形状，与影子又有什么关系？

本章将认识一些常见的投影现象，学习简单几何体的三种视图。你将通过观察、操作、想象、推理，感知图形的位置特征和形状特征，经历立体图形和平面图形相互转化的过程，进一步发展几何直观和空间观念。

💡 在本章学习过程中，你可以持续思考以下问题：

- ◎ 从生活中的影子到数学中的投影，再到对视图的研究，经历了怎样的过程？
- ◎ 研究一个几何体的投影与三种视图有什么意义和价值？



1

投影

在日常生活中，我们可以看到各种各样的影子。比如，在图 4-1 中，太阳光照射在窗框、长椅等物体上时，会在墙壁或地面上留下影子；而皮影和手影都是灯光照射形成的影子。



窗框的影子



长椅的影子



皮影



手影

图 4-1

物体在光的照射下，会在地面或其他平面上留下它的影子，这就是投影（projection）现象。影子所在的平面称为投影面。

操作 · 思考

取一些长度不同的小棒和三角形、矩形纸片，用手电筒（或台灯）等照射这些小棒和纸片，观察它们的影子。

（1）固定手电筒（或台灯），改变小棒或纸片的摆放位置和方向，影子分别发生了什么变化？

（2）固定小棒或纸片，改变手电筒（或台灯）的摆放位置和照射方向，影子分别发生了什么变化？



手电筒、路灯和台灯的光可以看成是从一个点发出的，这样的光所形成的投影称为中心投影（central projection）。

例1 确定图 4-2 中路灯灯泡所在的位置。

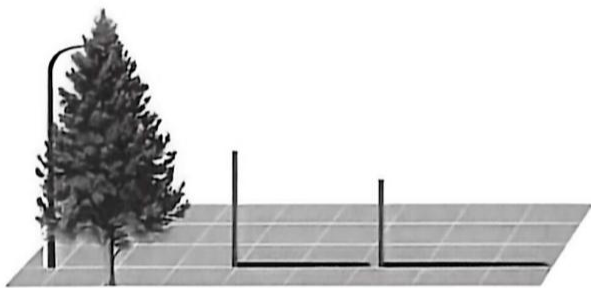


图 4-2

解：如图 4-3，过一根木杆的顶端及木杆影子的顶端画一条直线，再过另一根木杆的顶端及木杆影子的顶端画一条直线，两线相交于点 O 。点 O 就是路灯灯泡所在的位置。

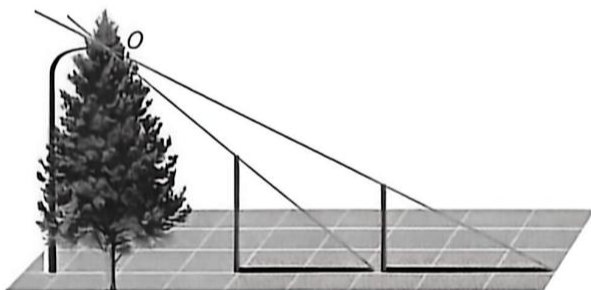


图 4-3

思考·交流

如图 4-4，一个广场中央有一盏路灯。

（1）身高相同的两个人在这盏路灯下的影子一定一样长吗？如果不一定，那么什么情况下他们的影子一样长？

（2）身高不同的两个人在这盏路灯下的影子有可能一样长吗？与同伴进行交流。



(3) 一个人在路灯下影子的长短与什么因素有关? 随着这些因素的变化, 影子是如何变化的?

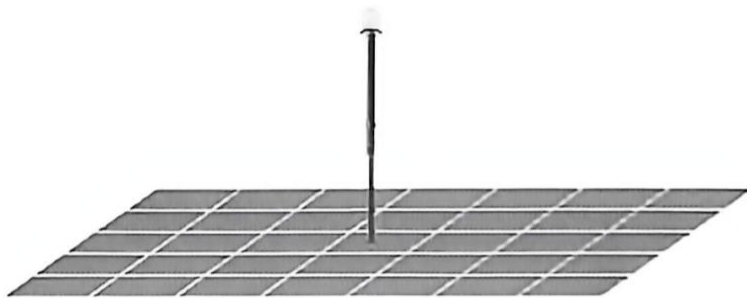


图 4-4

随堂练习

1. 举例说明生活中的中心投影现象。
2. 两棵小树在一盏路灯下的影子如图所示。
 - (1) 确定该路灯灯泡所在的位置;
 - (2) 在图中画出表示婷婷影长的线段。



(第2题)



阅读·欣赏

皮影戏与投影

皮影戏又称“影戏”“灯影戏”“土影戏”。它是一种用兽皮或纸板做成的人物剪影来表演故事的戏剧形式。如图4-5，表演时，借助灯光将剪影的活动影像投射在半透明的幕布上，艺人在幕后一边操纵剪影，一边演唱，并配以音乐。



图4-5

皮影戏最早兴起于中国、印度、印度尼西亚、土耳其等亚洲国家，随后传入欧美各国。皮影戏的产生和兴盛，大都与宗教活动有关，甚至在近代某些国家中仍作为一种祭祀仪式演出。后来发展起来的欧美国家皮影戏则是一种娱乐性的戏剧艺术。

自2005年以来，国家开展了非物质文化遗产保护工作。至今，我国各地的皮影戏已经有37项列入了国家级非物质文化遗产代表性项目名录。2011年11月，“中国皮影戏”列入联合国教科文组织“人类非物质文化遗产代表作名录”，对中国皮影戏的保护和发展起到了非常重要的作用。

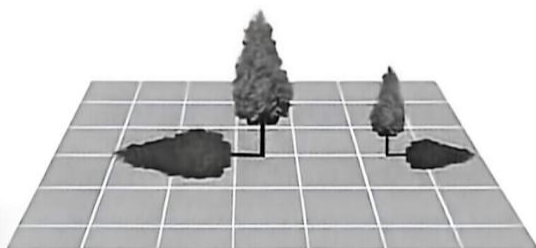


习题 4.1.1



知识技能

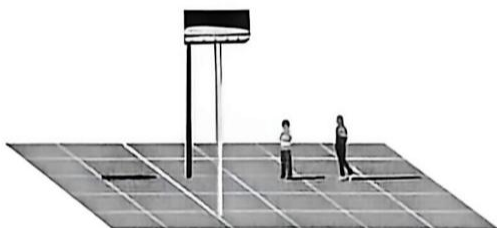
- 如图是两棵小树在同一灯光下的影子，请在图中画出形成树影的光线。你能确定光源的位置吗？



(第1题)

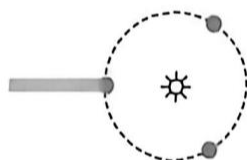
- 如图，一个广告牌挡住了路灯的灯泡。

- 确定图中路灯灯泡所在的位置；
- 在图中画出表示小赵身高的线段。



小赵 小张 小李

(第2题)



(第3题)

- 平地上立有三根等高的木杆，从上面看如图所示，图中画出了其中一根木杆在路灯灯光下的影子。你能分别在图中画出另外两根木杆在同一路灯灯光下的影子吗？
- 一个人在路灯下走动时，他在这盏路灯下的影子的长度与他到这盏路灯所在位置的有什么关系？



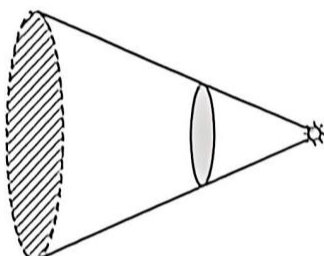


问题解决

5. 一个人站在一盏路灯下，利用他在这盏路灯下的影子可以估算出路灯灯泡的高度。请你设计一个估测方案。
- ※6. 如图(1)，透光镜是西汉中晚期制作的具有特殊效果的铜镜，它因在阳光照射下，背面的图文能映到墙上而得名，仿佛光线从镜背“穿透”镜体一样。宋代沈括在《梦溪笔谈》卷19曾记载：“世有透光鉴，鉴背有铭文，凡二十字，字极古，莫能读。以鉴承日光，则背文及二十字皆透在屋壁上，了了分明……文虽在背，而鉴面隐然有迹，所以于光中现。予观之，理诚如是。”



(1)



(2)

(第6题)

如图(2)，已知圆形透光镜的直径为0.6 m，距离墙面4 m，光源距离墙面6 m，则墙面上镜子留下的阴影部分的面积是多少平方米？

同一个物体在太阳光下的影子与在灯光下的影子有什么不同？

操作·思考

取一些长度不同的小棒及三角形、矩形纸片，观察它们在太阳光下的影子。

(1) 固定投影面，改变小棒或纸片的摆放位置和方向，影子分别发生了什么变化？

(2) 固定小棒或纸片，改变投影面的摆放位置和方向，影子分别发生了什么变化？



太阳光线可以看成平行光线，平行光线所形成的投影称为平行投影 (parallel projection)。如图 4-6 表示的都是平行投影。

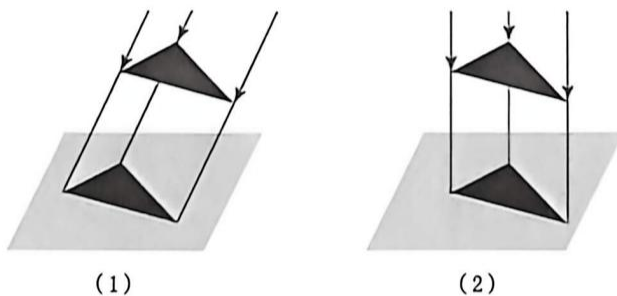


图 4-6

观察 · 交流

图 4-7 中的三幅图是某天上午不同时刻在我国某地的同一位置拍摄的。

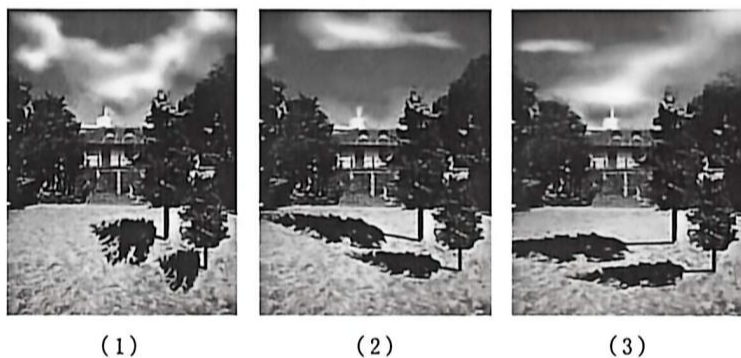


图 4-7

(1) 在三个不同时刻，同一棵树的影子长度不同，请将这三幅图按拍摄的先后顺序进行排列，并说明理由。

(2) 在同一时刻，两棵树影子的长度与它们的高度之间有什么关系？与同伴进行交流。

例2 某校墙边有甲、乙两根立柱，已知乙立柱的高度为 1.5 m。

(1) 某一时刻甲立柱在太阳光下的影子如图 4-8 所示，你能画出此时乙立柱的影子吗？



(2) 如果此时测得甲、乙立柱的影子长分别为 1.24 m 和 1 m, 求甲立柱的高度。

(3) 此时移动乙立柱, 当其影子落在墙上的高度为 0.6 m 时, 求乙立柱与墙之间的距离。

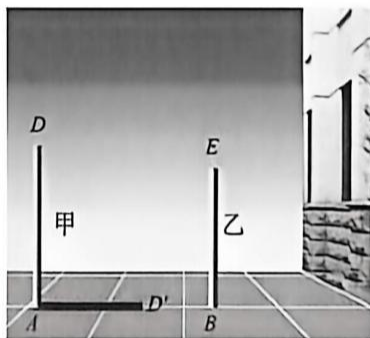


图 4-8

解: (1) 如图 4-9, 连接 DD' , 过点 E 作 DD' 的平行线, 交 AD' 所在的直线于点 E' 。 BE' 就是乙立柱的影子。

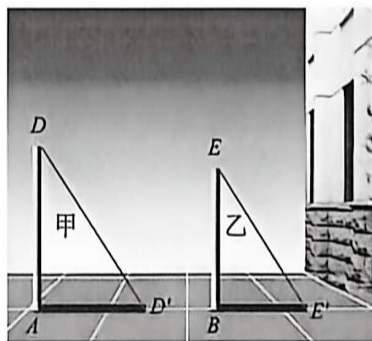


图 4-9

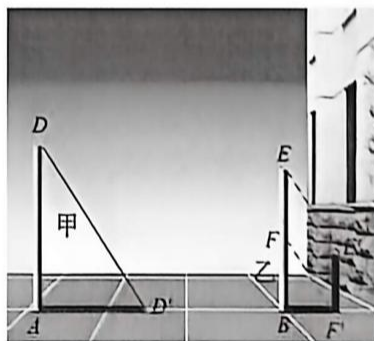


图 4-10

(2) 如图 4-9, 因为 $\triangle ADD' \sim \triangle BEE'$, 所以, $\frac{AD}{BE} = \frac{AD'}{BE'}$, 即 $\frac{AD}{1.5} = \frac{1.24}{1}$ 。

所以, 甲立柱的高度为 $AD = \frac{1.5 \times 1.24}{1} = 1.86$ (m)。

(3) 如图 4-10, 连接 EE' , 过点 F' 作 EE' 的平行线, 交 BE 于点 F 。

所以 $EF = E'F' = 0.6$ m。



所以 $BF = 1.5 - 0.6 = 0.9$ (m)。

所以 $\frac{BF}{BF'} = \frac{1.5}{1}$, 即 $\frac{0.9}{BF'} = \frac{1.5}{1}$ 。

所以, 乙立柱与墙之间的距离 $BF' = \frac{0.9 \times 1}{1.5} = 0.6$ (m)。

操作·交流

(1) 两棵小树在同一时刻的影子如图 4-11 所示, 请在图中画出形成树影的光线。它们是太阳光线还是灯光的光线? 与同伴进行交流。



图 4-11

(2) 图 4-12 中的影子是在太阳光下形成的还是在灯光下形成的? 画出同一时刻立柱的影子(用线段表示), 并与同伴交流这样做的理由。

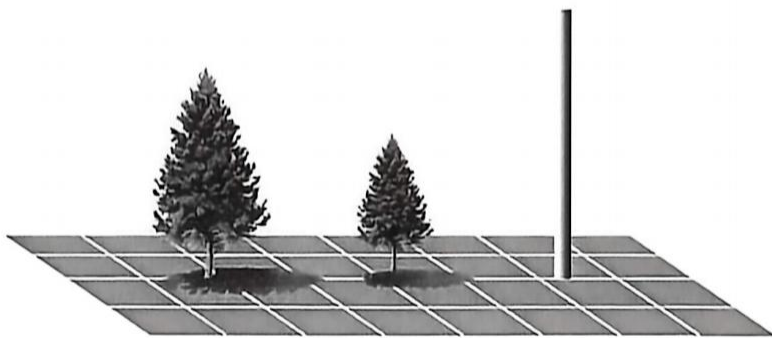


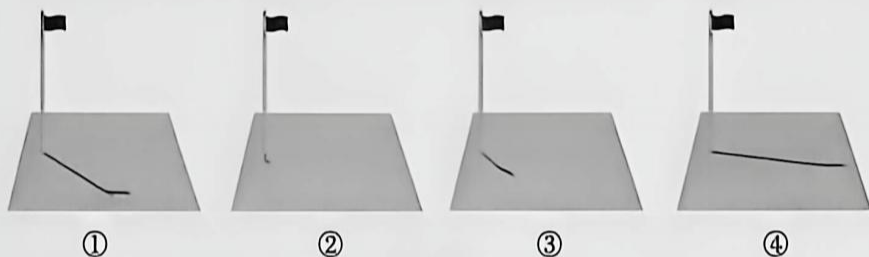
图 4-12



随堂练习

1. 如图所示是某一天上午不同时刻同一根旗杆的影子, 则它们按时间先后排列应为 ()。

(A) ①②③④ (B) ④③②① (C) ④①③② (D) ②③④①



(第1题)

2. 甲、乙两根木杆竖直地立在平地上, 其中甲木杆的高度为 3 m, 乙木杆的高度为 2 m。在某一时刻, 甲木杆在太阳光下的影子如图所示, 请在图中画出此时乙木杆在太阳光下的影子。



(第2题)

阅读·欣赏

中国古代的计时器——日晷 [guǐ]

日晷是我国古代测日影定时刻的仪器 (图 4-13)。日晷由晷针和晷盘组成, 晷盘上有时间刻度, 晷针垂直于盘面, 通过晷针日影在盘面上的长度、方向以及在圆盘不同位置测定时间。

日晷是怎样计时的呢?

从原理上来说, 根据影子的长度或方向都可以计时, 但根据影子的方向来计时更方便一些。随着时间的推移, 晷针上的影子慢慢地由西向东移动。移动着的晷针影子好像是现代钟表的指针, 晷盘则是钟表的表面, 以此来显示时刻。

由于春分到秋分期间, 太阳总是在天赤道的北侧运行, 晷针的影子投向晷面上方; 从秋分到春分期间, 太阳在天赤道的南侧运行, 晷针的影子投向晷



面的下方。所以在春分以后看晷盘的上面，秋分以后看晷盘的下面。一年中影子最短的日子是夏至，最长的是冬至。均分冬至到夏至影子长短的差值，就可以定出一年的二十四节气。



图4-13



图4-14

图 4-14 为“周公测景(yǐng)台”，唐代开元年间重建。景，通“影”。“测景”就是测量太阳的影子。周公测景台实际就是一个石制日晷。

今天除了在科普场所经常看到日晷，很多学校也建有日晷模型，意在提示学生珍惜时间发奋读书。

习题 4.1.2

知识技能

- 一天下午，小军先参加了校运动会男子 200 m 比赛，然后又参加了男子 400 m 比赛，摄影师在同一位置拍摄了他参加这两场比赛的照片（如图）。你认为小军参加 400 m 比赛的照片是哪一张？为什么？



(1)



(2)

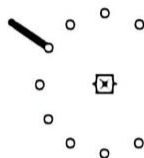
(第1题)



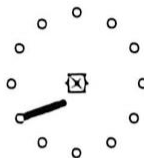
2. 如图(1), 中间是一盏路灯, 周围有一圈栏杆, 图(2)(3)表示的是这些栏杆的影子, 但没有画完。请你把图(2)(3)补充完整。



(1)



(2)



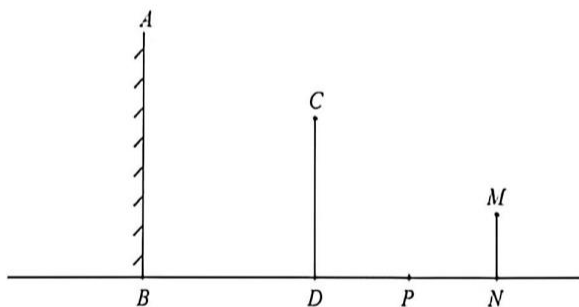
(3)

(第2题)



问题解决

3. 如图, 在校园一面围墙 AB 前有一路灯杆 CD 。小明在太阳光下借助竹竿 MN 测量该路灯杆的高度, 线段 PN 表示竹竿在地面上的影子。
- (1) 请画出此刻路灯杆 CD 在太阳光下的影子;
- (2) 测得 $MN=1\text{ m}$, $PN=1.5\text{ m}$, 围墙与路灯杆之间的距离 $BD=3\text{ m}$, 路灯杆的影子落在围墙上的那部分高度为 0.5 m , 求路灯杆 CD 的高度。



(第3题)

4. 设计一个方案, 利用人和旗杆的影子, 估计旗杆的高度。
- ※5. 在太阳光下摆弄立方块, 观察立方块在地面上的影子, 你得到的影子分别是几边形? 与同伴进行交流。



6. 分组活动：选一个阳光明媚的日子，4人一组在校园内平坦的空地上立一根木杆，分别在上午、中午、下午观察这根木杆影子的方向，同时测量木杆的影长，并将有关结果填入下表：

时间	杆影方向	杆影长度	$\frac{\text{杆影长度}}{\text{木杆长度}}$

通过观察和测量，你发现了什么？

在我国的北方，晴天时无论上午、中午还是下午，太阳光总是倾斜地照射在地面上。

(1) 地球上的居民能不能看到太阳光垂直照射在地面上的情况？

(2) 当太阳光垂直照射在地面上时，如果拿起一根细木棒，它在地面上的影子会出现哪些可能的情况？

在平行投影中，当投影线垂直于投影面（即投影线正对着投影面）时，物体在投影面上的投影称为正投影（orthographic projection）。

如图4-15，相对于线段 AB 与投影面的三种不同的位置关系，线段 AB 的正投影分别有以下三种不同情况：可能是与线段 AB 等长的一条线段，也可能是长度较短的一条线段，甚至还可能是一个点。

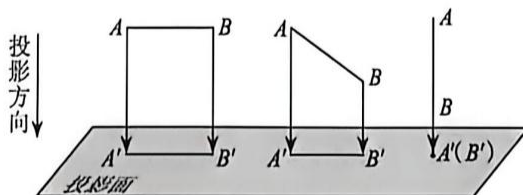


图 4-15



观察·思考

图 4-16 表示矩形 $ABCD$ 在投影面上的三种正投影，分析这三种情况，你能发现平面图形的正投影有什么规律吗？先想一想，再与同伴进行交流。

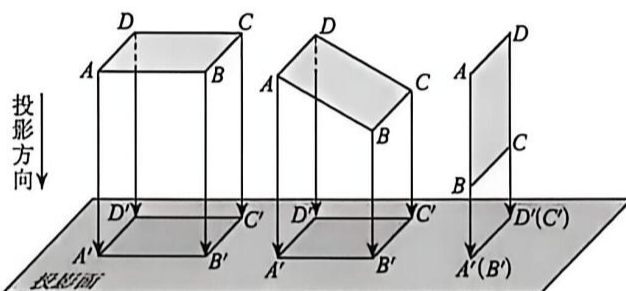


图 4-16

例3 一个长方体与投影面的相对位置如图 4-17 所示，矩形 $A'B'C'D'$ 是长方体在投影面上的正投影，你能说出长方体的各个面在投影面上的正投影吗？

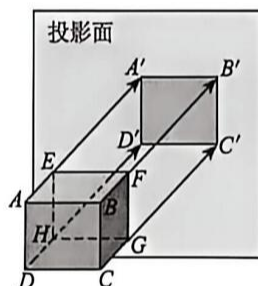


图 4-17

解：面 $ABCD$ 与面 $EFGH$ 的正投影都是矩形 $A'B'C'D'$ ；
 面 $ABFE$ 的正投影是线段 $A'B'$ ，面 $DCGH$ 的正投影是线段 $D'C'$ ；
 面 $BCGF$ 的正投影是线段 $B'C'$ ，面 $ADHE$ 的正投影是线段 $A'D'$ 。

思考·交流

例 3 中，长方体的各个面与它们的正投影的形状和大小分别有什么联系？
 与同伴进行交流。

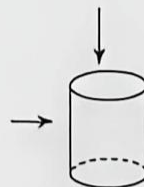


随堂练习

1. 回答下列问题:

- (1) 球的正投影是什么图形?
- (2) 长方体的正投影一定是矩形吗?

2. 分别按图中投影线的方向, 画出圆柱体的正投影。



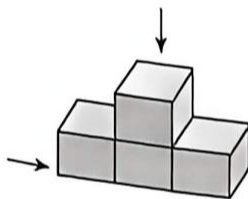
(第2题)

习题 4.1.3



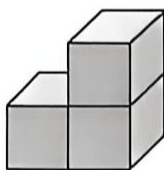
知识技能

1. 按图中投影线的方向, 分别画出这个几何体的正投影。

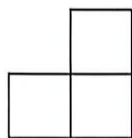


(第1题)

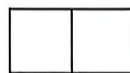
2. 图中的几何体是用3个大小相同的正方体拼成的, 它的正投影不可能是 ()。



(第2题)



(A)



(B)



(C)



(D)



联系拓广

3. 一个几何体在投影面上的正投影是一个圆, 那么这个几何体可能是什么?
说出其中两种不同几何体的名称。



2

视图

如图 4-18，假设有一束平行光线从正面投射到图中的物体上，你能想象出它在这束平行光线下的正投影吗？把你想象的正投影画出来，并与同伴进行交流。

如果平行光线从左面投射到图中的物体上，结果又是怎样的？如果平行光线从上面投射到图中的物体上呢？

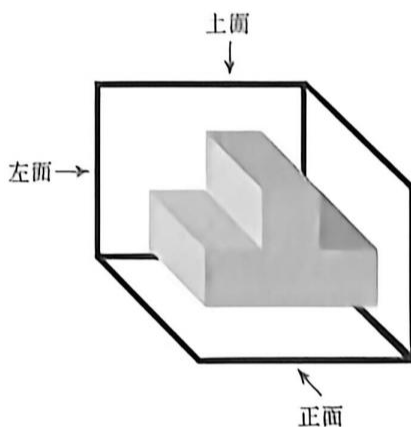


图 4-18

像这样，用正投影的方法绘制的物体在投影面上的图形，称为物体的视图（view）。在实际生活和工程中，人们常常从正面、左面和上面三个不同方向观察一个物体，分别得到这个物体的三个视图，这样大体上就把一个物体的形状特征用平面图形表示出来了。通常我们把从正面得到的视图叫作主视图（front view），从左面得到的视图叫作左视图（left view），从上面得到的视图叫作俯视图（planform view）。

例如，图 4-18 中物体的主视图、左视图和俯视图如图 4-19 所示：

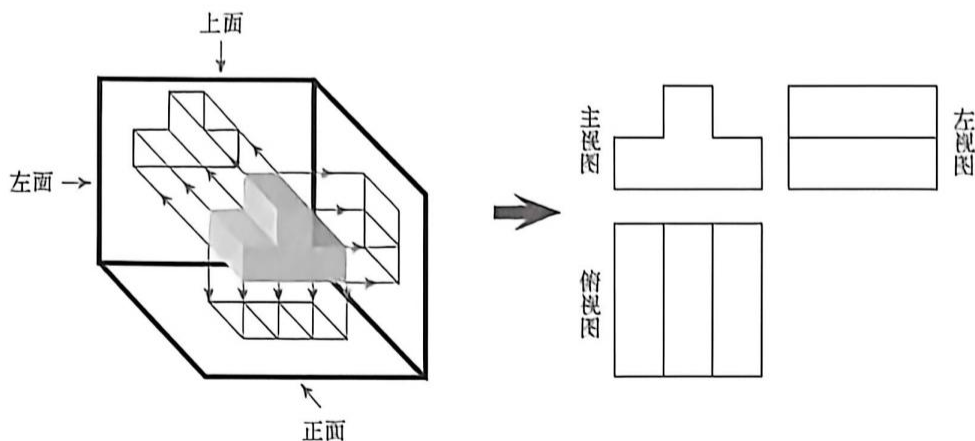


图 4-19



观察·交流

(1) 图 4-20 中物体的形状分别可以看成什么样的几何体？你能想象出它们的主视图、左视图和俯视图吗？与同伴进行交流。

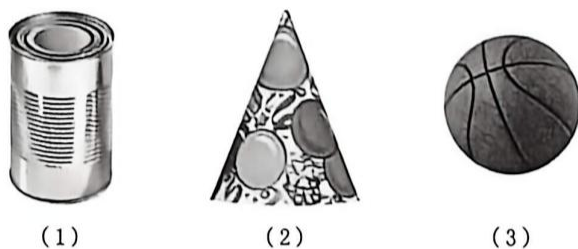


图 4-20

(2) 在图 4-21 中分别找出上述几何体的主视图。

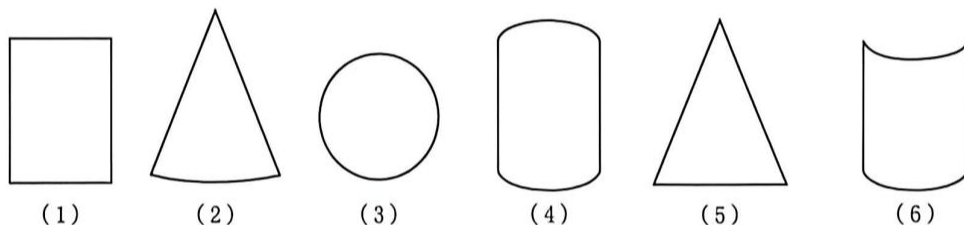


图 4-21

(3) 图 4-20 中各物体的左视图是什么？俯视图呢？与同伴进行交流。

图 4-20 (1) (2) (3) 物体的形状分别可以看成是圆柱、圆锥和球。它们的主视图、左视图和俯视图如下表所示：

几何体	主视图	左视图	俯视图
			
			
			



操作·思考

图 4-22 是一个蒙古包的照片，小明认为这个蒙古包可以看成图 4-23 所示的几何体，你能帮小明画出这个几何体的主视图、左视图和俯视图吗？



图 4-22



图 4-23

随堂练习

1. 找出图中每种物品所对应的主视图。



(1)



(2)



(3)



(4)



(A)



(B)



(C)



(D)

(第1题)

2. 将两个圆盘、一个茶叶桶、一个皮球和一个蒙古包模型按如图所示的方式摆放在一起，其主视图是 ()。



(第2题)



(A)



(B)



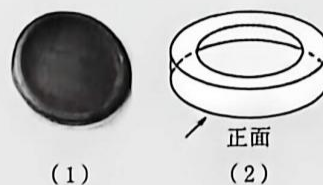
(C)



(D)

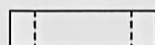


3. 松花石有“石中之宝”的美誉，用它制作的砚台叫松花砚。如图是一款松花砚的示意图，其俯视图为（ ）。



(1) (2)

(第3题)



(A)



(B)



(C)



(D)

习题 4.2.1



知识技能

1. 画出下列物体的三种视图。



(1)



(2)

(第1题)



(第2题)

2. 把一个圆锥的上部截去一个小圆锥(如图)，画出剩余部分的三种视图。
3. (1) 画出图中各个几何体的主视图、左视图和俯视图；
(2) 请找出一些与图中几何体形状类似的物体，并尝试画出它们的三种视图。



(1)



(2)



(3)

(第3题)



思考·交流

图 4-24 是一个正三棱柱^❶。

(1) 你能想象出这个正三棱柱的主视图、左视图和俯视图吗？你能画出它们吗？

(2) 你所画的主视图与俯视图有哪些部分对应相等？主视图与左视图有哪些部分对应相等？左视图与俯视图呢？与同伴进行交流。



图 4-24

在三种视图中，主视图反映物体的长和高，俯视图反映物体的长和宽，左视图反映物体的高和宽。因此在画三种视图时，对应部分的长度要相等，而且通常把俯视图画在主视图下面，把左视图画在主视图右面。例如，图 4-24 所示正三棱柱的三种视图可以表示为图 4-25。

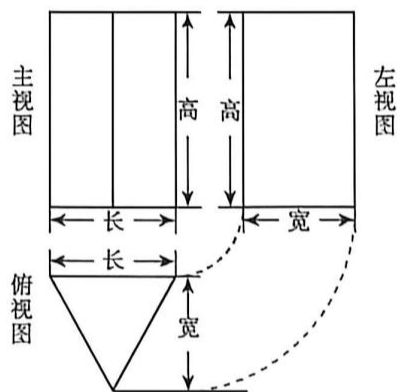


图 4-25

例1 画出如图 4-26 所示的四棱柱的主视图、左视图和俯视图。

解：这个四棱柱的三种视图如图 4-27 所示。



图 4-26

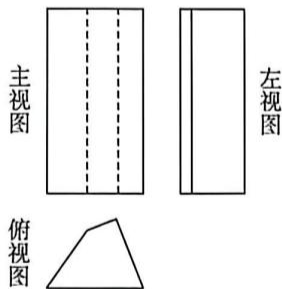


图 4-27

在画视图时，看得见部分的轮廓线要画成实线，看不见部分的轮廓线要画成虚线。

❶ 底面为正多边形的直棱柱称为正棱柱。



操作·思考

两个三棱柱的底面均为等腰直角三角形，它们的俯视图分别如图 4-28 (1) (2) 所示，画出它们的主视图和左视图。

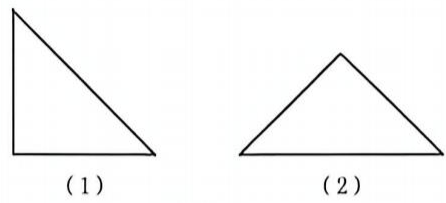
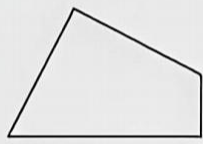


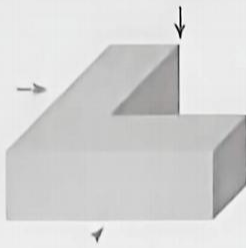
图 4-28

随堂练习

1. 已知直四棱柱的俯视图如图所示，画出它的主视图和左视图。



(第1题)



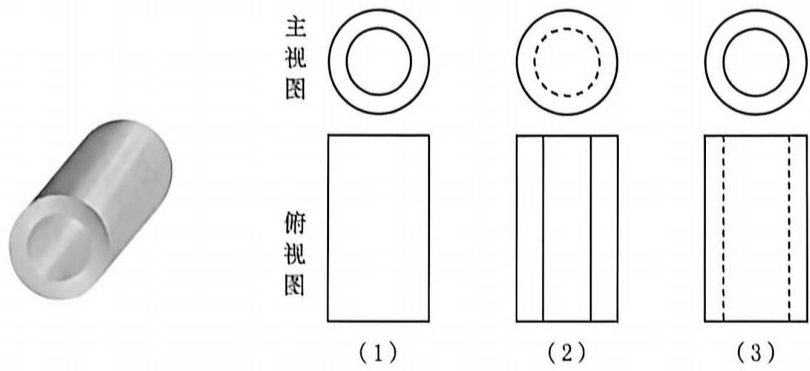
(第2题)

2. 画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。

习题 4.2.2

知识技能

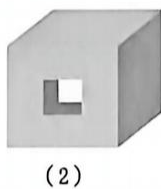
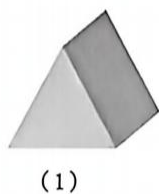
1. 在如图所示的空心圆柱的两种视图中，哪些有错误？为什么？



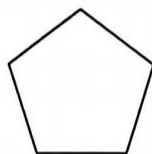
(第1题)



2. 画出如图所示几何体的三种视图。



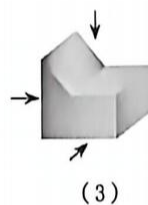
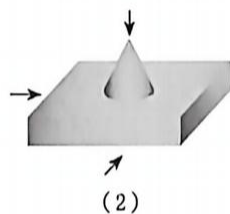
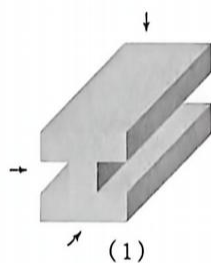
(第2题)



(第3题)

3. 一个直五棱柱的俯视图如图所示，请你画出它的主视图和左视图。

4. 分别画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图。



(第4题)

观察·思考

观察图 4-29 中的三种视图，你能在图 4-30 中找出与之对应的几何体吗？

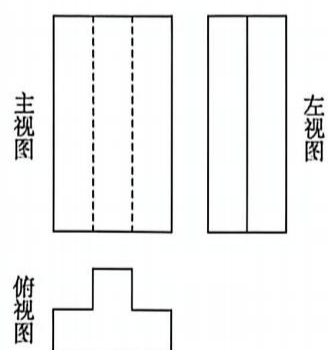


图 4-29

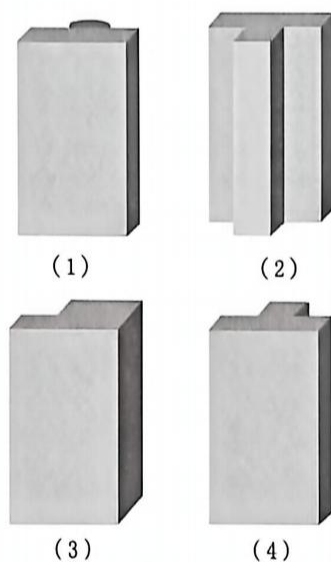


图 4-30



思考 · 交流

根据图 4-31 中的三种视图，你能想象出与之对应的几何体的形状吗？先独立思考，再与同伴进行交流。

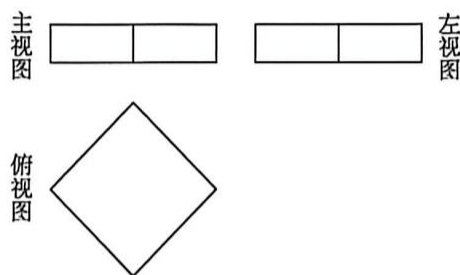


图 4-31

操作 · 交流

- (1) 想象一个几何体，并画出它的三种视图。
- (2) 请同伴根据你画出的三种视图描述这个几何体的形状。
- (3) 怎样由三种视图判断与之对应的几何体的形状特征？与同伴进行交流。

操作 · 思考

图 4-32 是由若干个同样大小的正方体所搭几何体的俯视图，小正方形中的数字表示在该位置正方体的个数。请画出这个几何体的主视图和左视图，并画出几何体的草图。

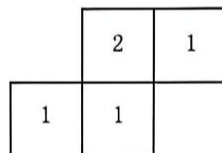


图 4-32

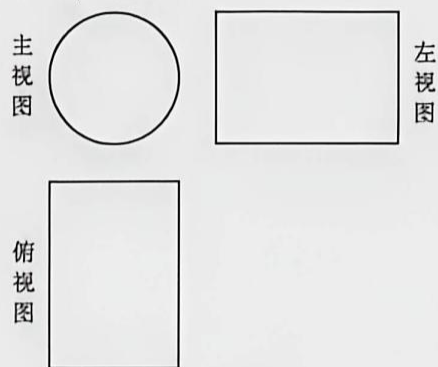
回顾 · 反思

回顾投影与视图的学习过程，你在用平面图形刻画立体图形方面积累了哪些经验？



随堂练习

1. 根据如图所示的三种视图，你能想象出与之对应的几何体的形状吗（画出这个几何体的草图）？



(第1题)

习题 4.2.3

知识技能

1. 根据下列主视图和俯视图，分别找出与之对应的几何体，并将视图的序号填在相应几何体下面的括号里：

主视图



俯视图



(1)

(2)

(3)

(4)



()



()



()

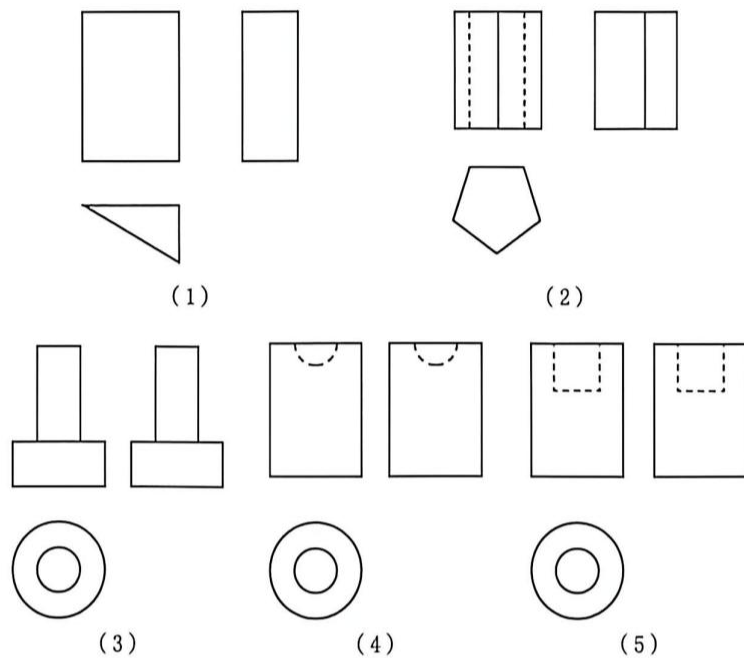


()

(第1题)



2. 根据如图所示的三种视图, 分别说出与之对应的几何体的形状。

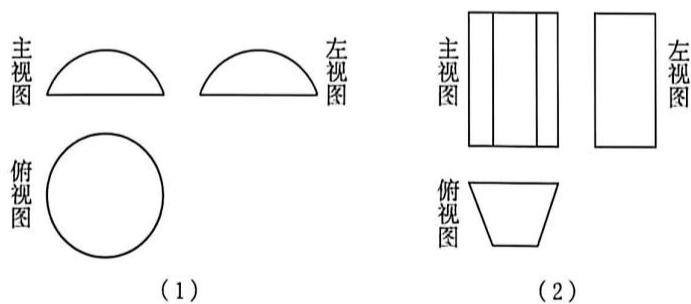


(第2题)



问题解决

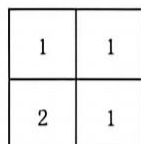
3. 根据如图所示的三种视图, 你能想象出与之对应的几何体的形状吗 (画出这个几何体的草图)?



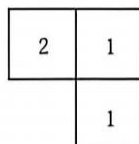
(第3题)



4. 下面的两幅图是由若干个同样大小的正方体所搭几何体的俯视图，小正方形中的数字表示在该位置的正方体的个数。请画出相应几何体的主视图和左视图。



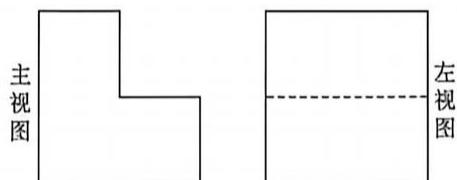
(1)



(2)

(第4题)

- ※5. 一个几何体的主视图和左视图如图所示，你能想象出与之对应的几何体的形状吗？请画出这个几何体的草图，并结合草图画出它的俯视图。



(第5题)



回顾与思考

1. 列举一些中心投影和平行投影的实例。
2. 举例说明灯光及其影子、太阳光及其影子的应用。
3. 你能找出主视图和左视图完全相同的几何体吗？你能找出三种视图完全相同的几何体吗？请各举两例。
4. 举例说明画几何体的三种视图时要注意的问题。
5. 与同伴结对，互相提供视图，让对方根据所提供的视图描述相应几何体的形状。
6. 梳理本章内容，用适当的方式呈现全章知识结构，并与同伴进行交流。

复习题

知识技能

1. (1) 确定图(1)中路灯灯泡的位置，并画出婷婷在这盏路灯下的影子（用线段表示）；
(2) 小高在太阳光下的影子如图(2)所示，请画出此时婷婷在太阳光下的影子（用线段表示）。



婷婷

小李

小高

(1)



婷婷

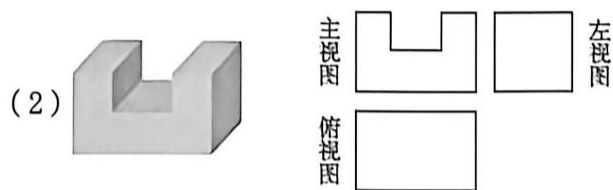
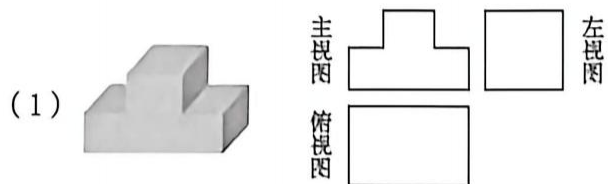
小高

(2)

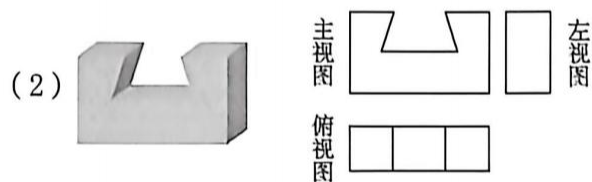
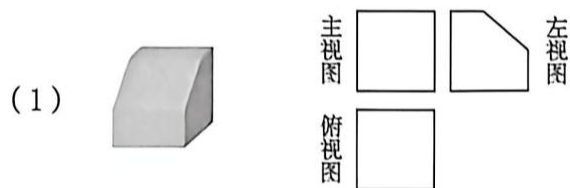
(第1题)



2. 下列几何体的三种视图有没有错误（不考虑尺寸）？为什么？如果有错误，应该怎样改正？



3. 添线补全下面几何体的三种视图。

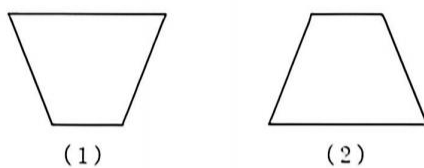


4. 补全下列几何体的三种视图。





5. 两个四棱柱的底面均为梯形，它们的俯视图分别如图所示，画出它们的主视图和左视图。



(第5题)

6. 画出如图所示几何体的三种视图。



(1)



(2)



(3)

(第6题)



(1)

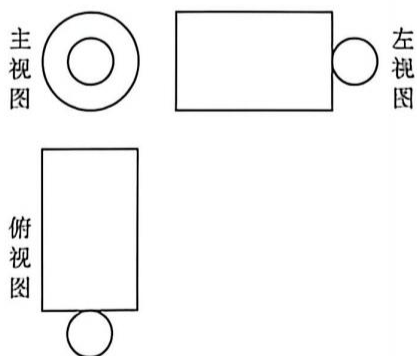


(2)

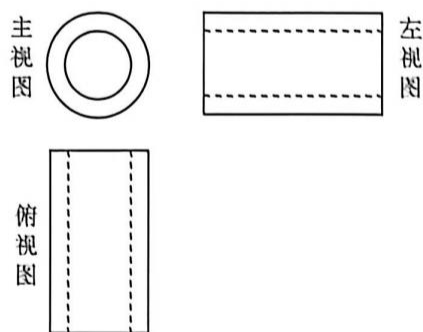
(第7题)

7. 画出如图所示几何体的三种视图。

8. 根据如图所示的三种视图，你能想象出与之对应的几何体的形状吗（画出这个几何体的草图）？



(1)

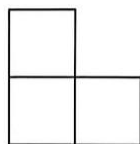


(2)

(第8题)

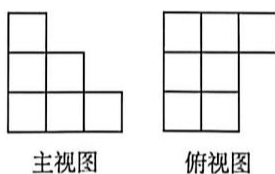


9. 如图是用3个同样大小的正方体搭成的几何体的主视图，画出俯视图和左视图。



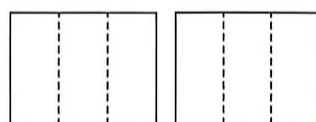
(第9题)

10. 用若干个同样大小的正方体搭一个几何体，使得它的主视图和俯视图如图所示。这样的几何体只有一种吗？它最少需要用多少个正方体？最多需要用多少个？



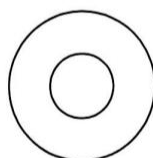
(第10题)

11. 两个几何体的三种视图如图所示，你能想象出它们的形状吗？请画出这两个几何体的草图。



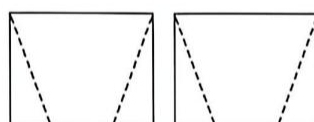
主视图

左视图



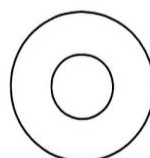
俯视图

(1)



主视图

左视图



俯视图

(2)

(第11题)





问题解决

12. 一盏路灯旁有一个广告牌，小明用如下方法测量这个广告牌的高度：先测量广告牌在这盏路灯下的影长，再找一根长度已知的竹竿，任意选定一个位置测量竹竿在这盏路灯下的影长，然后由“广告牌高度与其影长之比等于竹竿长与其影长之比”即可求出广告牌的高度。你觉得他的方法有道理吗？为什么？
13. 分组设计并实施一个运用影子解决问题的活动，撰写一份活动报告，阐明活动的目的、要求、过程、结论及相关思考。
14. 在你所在地区，一天中什么时刻物体在太阳光下的影子最短？进行实际观察、测量活动，并把活动的过程和结果写成一篇数学小论文。
15. 以“视图在生产生活中的应用”为主题，制作一份手抄报，并在班级内分享。



综合

与实践

制作遮阳篷模型

在日常生活中，为了达到冬暖夏凉和美观的效果，有些窗户安装了遮阳篷。你会设计遮阳篷吗？

设计方案

1. 制作遮阳篷需要考虑哪些影响因素？查阅相关资料，与同伴进行交流。
 2. 在你所在地区如果要设计一个冬暖夏凉的遮阳篷，需要考虑哪些因素？
 3. 如果想让你们设计的遮阳篷更加美观，还需要考虑哪些因素？
- 请访谈专业人员、查阅相关资料，再确定你们的遮阳篷模型的设计方案。

实施方案

1. 查阅资料或进行实地调查，了解遮阳篷设计、制作的实际过程与步骤。
2. 请选择一种形状的遮阳篷，绘制遮阳篷的设计图纸。
3. 根据设计图纸，选择合适的材料制作遮阳篷模型。

评估反思

1. 分析各小组设计、制作的遮阳篷模型，小组间进行交流和评估。
2. 还可以怎样改进你们小组设计、制作的遮阳篷模型？
3. 在设计、制作遮阳篷模型的过程中，你们遇到了哪些困难？是怎样克服的？积累了哪些经验？

成果展示

1. 在班级内展示你们小组最终的设计图纸和遮阳篷模型，分享你们设计、制作过程中的心得体会。
2. 制作演示文稿，展示你们收集的遮阳篷设计与制作的相关资料。



拱桥形状设计

拱桥是桥梁家族中的重要一员，跨度大，造型优美灵活，可雄伟壮观，可小巧玲珑。

问题提出

某桥梁建筑公司需在两山之间的峡谷上架设一座公路桥，桥下是一条宽 100 m 的河流，河面距所要架设的公路桥桥面的高度是 50 m。根据各方面条件的分析，专家认为抛物线形拱桥是最好的选择。制作桥梁模型，重点是桥拱形状的设计。如果要修建这座横跨峡谷的公路桥，请你设计并作出抛物线形桥拱设计图。

设计方案

1. 设计拱桥时，桥拱形状的选择需要考虑哪些因素？
2. 在设计抛物线形拱桥时需要考虑哪些因素？
3. 如果想让你们设计的拱桥更加美观，还需要考虑哪些因素？

请访谈专业人员、查阅相关资料，再确定你们的抛物线形桥拱设计方案。

实施方案

1. 查阅资料或进行实地调查，了解抛物线形桥拱模型设计、制作的实际过程与步骤。
2. 抛物线形桥拱的形状由什么因素来决定？是否能求出桥拱对应的函数表达式？
3. 在此基础上，自己进行设计并绘制抛物线形桥拱设计图，标出桥拱的跨度、桥拱与峡谷衔接的地方距河面的高度、桥拱的最高点到桥面的距离等。
4. 根据设计图纸，选择合适的材料制作抛物线形桥拱模型。



评估反思

1. 分析各小组设计、制作的抛物线形桥拱模型，小组间进行交流和评估。
2. 你们小组设计、制作的抛物线形桥拱模型还可以做怎样的改进？
3. 在设计、制作抛物线形桥拱模型的过程中，你们遇到了哪些困难？是怎样克服的？积累了哪些经验？

成果展示

1. 在班级内展示你们小组最终的设计图纸和抛物线形桥拱模型，说明桥拱所在抛物线的表达式，分享设计思路及设计过程中的心得体会。
2. 制作演示文稿，展示你们收集的抛物线形桥拱设计的相关资料，说明抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的系数是如何影响桥拱形状的。

能将矩形的周长和面积同时加倍吗

任意给定一个正方形，是否存在另一个正方形，它的周长和面积分别是已知正方形周长和面积的 2 倍？你是怎样解决这个问题的？

让我们从这个问题出发，研究更一般的情形。

猜想与证明

1. 从上述问题出发，你能提出哪些更一般的问题或猜想？你能解决你的问题或验证你的猜想吗？
2. 任意给定一个矩形，是否存在另一个矩形，它的周长和面积分别是已知矩形周长和面积的 2 倍？
 - (1) 你想怎样解决这个问题？先独立思考，再与同伴交流解决这个问题的思路。
 - (2) 选择一些具体的矩形试一试，你有什么发现和猜想？能证明你的猜想吗？



拓广与证明

1. 你能将上述“猜想与证明”的问题 2 加以拓广, 并提出自己的猜想吗? 你能验证你的猜想吗?
2. 任意给定一个矩形, 是否存在另一个矩形, 它的周长和面积分别是已知矩形周长和面积的一半?
 - (1) 你有怎样的猜想? 请选择一些具体的矩形试一试。
 - (2) 你的猜想需要修正吗? 与同伴进行交流。
 - (3) 如何证明你的猜想?

反思与交流

1. 在解决上述问题的过程中, 你遇到了什么困难? 是如何克服的? 积累了哪些解决问题的经验?
2. 你还能提出哪些可以继续研究的问题? 与同伴交流你提出的新问题及探索过程。



总复习题

- 整理本学期学过的数学知识和方法，并与同伴进行交流。
- 在自己经历过的解决问题活动中，选择一个最具有挑战性的问题，写出解决它的过程，包括遇到的困难、克服困难的方法与过程及所获得的体会，并解释选择这个问题的原因。
- 通过本学期的数学学习，你有哪些收获？有哪些需要改进的地方？



知识技能

1. 计算：

(1) $\sin 60^\circ - \cos 45^\circ + \tan 45^\circ$; (2) $\cos^2 60^\circ + \sin^2 45^\circ$.

2. (1) 已知 $\angle A$ 是锐角， $\sin A = \frac{1}{5}$ ，求 $\angle A$ 的其他三角函数值；

(2) 已知 $\angle A$ 是锐角， $\tan A = \frac{8}{15}$ ，求 $\angle A$ 的其他三角函数值。

3. 根据条件求锐角：

(1) $\sin A = 0.753$ ，求 $\angle A$ ；

(2) $\cos B = 0.0832$ ，求 $\angle B$ ；

(3) $\tan C = 45.8$ ，求 $\angle C$ 。

4. 求下列二次函数的图象的对称轴和顶点坐标：

(1) $y = -(x-2)^2 + 4$; (2) $y = -2(x+5)^2 - 3$;

(3) $y = x - 2x^2$; (4) $y = 2x(3-x)$;

(5) $y = 9 - 2x - x^2$ 。

5. 求下列二次函数的图象与 x 轴的交点坐标，并画草图验证：

(1) $y = -(x+2)(x-2)$; (2) $y = 9x^2 - 49$;

(3) $y = 5 + x - 4x^2$; (4) $y = (x+1)^2 - 9$ 。



6. 用图象法求下列一元二次方程的近似根:

(1) $x^2 - 5x + 5 = 0$;

(2) $2x^2 - 4x = 5$;

(3) $x^2 - 6x = 3$;

(4) $5x^2 + 4x - 3 = 0$ 。

7. 将 50 kg 的理想气体装在体积为 $V \text{ m}^3$ 的容器中, 气体的密度为 $\rho \text{ kg/m}^3$ 。

写出密度 ρ 与体积 V 之间的表达式。

8. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(3, -2)$, 那么点 $(-2, 3)$ 和点 $(-3, 2)$ 是否在这个函数的图象上? 为什么?

9. 反比例函数 $y = \frac{a}{2x}$ (a 为非零常数) 的图象在其所在象限内 y 的值随着 x 值的增大而增大, 那么函数 $y = \frac{2}{ax}$ 的图象位于哪些象限内? y 的值随着 x 值的增大怎样变化? 为什么?

10. 已知 $A(m+3, 2)$ 和 $B(3, \frac{m}{3})$ 是同一个反比例函数图象上的两个点。

(1) 求 m 的值;

(2) 画出这个反比例函数的图象;

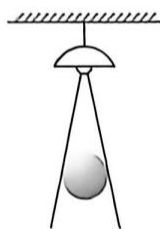
(3) 在函数图象上标出 A, B 两点。

11. 如图所示, 在一间黑屋子里用一盏白炽灯照射一个球。

(1) 这个球在地面上的影子是什么形状?

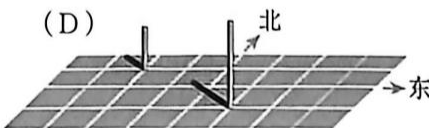
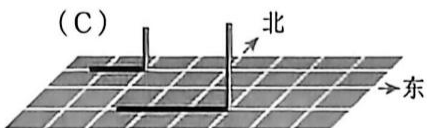
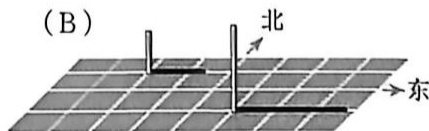
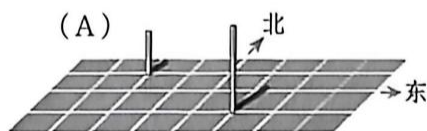
(2) 当球的位置变化时, 影子的形状和大小会怎样变化?

请你实际试一试!



(第11题)

12. 两根立柱一天中四个不同时刻的影子如图所示, 将这四幅图按时间先后顺序进行排列, 并说明理由。



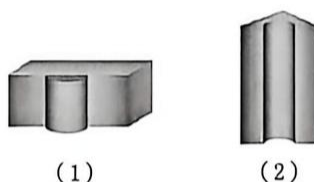
(第12题)



13. 甲、乙两人在太阳光下行走，同一时刻他们的身高与其影长的比之间有什么关系？
14. 小明和小颖在太阳光下行走，小明身高 1.75 m，他的影长 2.0 m，小颖比他矮 5 cm，此刻她的影长是多少？
15. 分别画出如图所示的实物的三种视图。

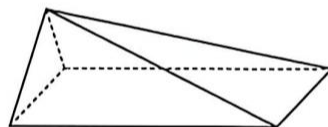


(第 15 题)

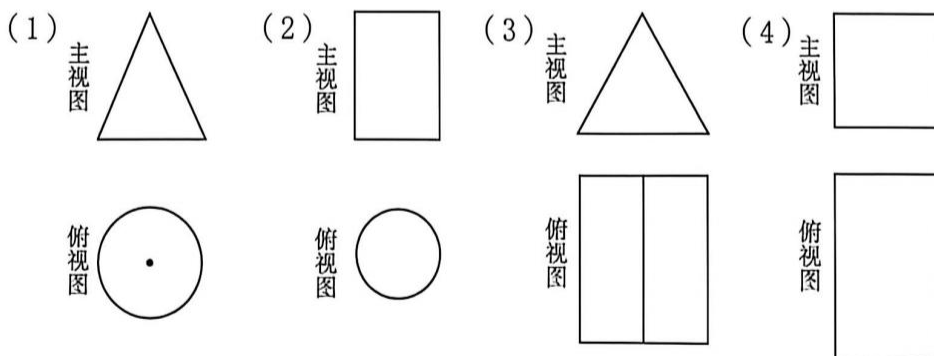


(第 16 题)

16. 分别画出如图所示的几何体的三种视图。
17. 在太阳光的照射下，球在地面上的影子是什么形状？当球的位置变化时，影子的形状和大小会发生变化吗？请你实际试一试！
18. 如图所示的图形是一个水平放置的正三棱柱被斜着截去一部分后形成的，请画出它的主视图、左视图和俯视图。
19. 根据下面两种视图，你能想象出几何体的形状吗（画出几何体的草图）？



(第 18 题)



(第 19 题)





问题解决

20. 学校组织学生参加实践活动，教师要求学生测量学校附近的高压电线杆的高度，具体有以下条件：

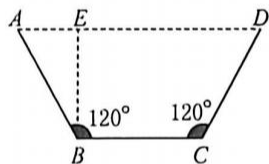
- ① 工具：测角仪（可测水平角、倾斜角等）、米尺、标杆（长度小于2 m）等；
- ② 为了安全，不允许到距离电线杆约5 m的范围内；
- ③ 电线杆周围比较平坦。

请你按下列要求设计一个测量电线杆高度的方案：

- (1) 简述测量方法；
- (2) 画出示意图（标出有关的角及线段）；
- (3) 求出电线杆的高 h （用字母表示）。

说明：角度用字母 α, β, γ 等表示；距离（线段长度）用字母 a, b, c 等表示。

21. 用一块宽度为5 m的矩形铁片弯折成如图所示的等腰梯形（即 $AB=CD$ ）流水槽。要使流水的截面面积最大，弯折的长度（梯形的腰）应为多少？



（第21题）



（第22题）

22. 如图，某运动场跑道的周长为400 m且两端为半圆形，要使矩形内部操场的面积最大，直线跑道的长应为多少？

23. 甲船从A处以15 n mile/h的速度向正北方向航行，这时乙船从A的正东方向20 n mile的B处以20 n mile/h的速度向西航行。多长时间后，两船的距离最小？最小距离是多少？

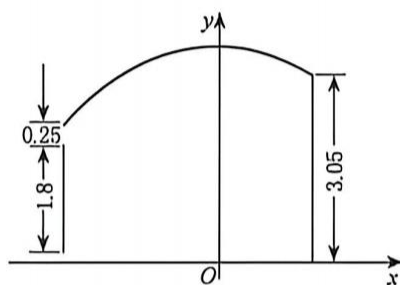


24. 如图, 一块长 x m、宽 y m 的矩形绿地由篱笆围着, 并且由一条与长边平行的篱笆分开, 篱笆的总长为 600 m。

- (1) 用含 x 的代数式表示矩形绿地的面积 S , 并写出自变量 x 的取值范围;
(2) 求矩形绿地的最大面积及此时 x 的值。



(第 24 题)



(第 25 题)

25. 一名身高 1.8 m 的篮球运动员在距篮板 4 m 处跳起投篮, 球在运动员头顶上方 0.25 m 处出手。按如图所示的平面直角坐标系, 球在空中运行的路线可以用 $y = -0.2x^2 + 3.5$ 来描述。

- (1) 球能达到的最大高度是多少?
(2) 球出手时, 运动员跳离地面的高度是多少?



联系拓广

26. 正比例函数 $y = kx$ 和反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象相交于 A, B 两点, 已知点 A 的横坐标为 1, 点 B 的纵坐标为 -3 。

- (1) 求 A, B 两点的坐标;
(2) 写出这两个函数的表达式。



后记

《义务教育教科书（五·四学制）·数学》（六至九年级）是在马复主编的北师大版六·三学制《义务教育教科书·数学》（七至九年级）的基础上改编而成的，供五·四学制地区师生使用。

本套教科书以教育部《义务教育数学课程标准（2022年版）》为依据，吸取了五·四学制地区多年来在教学实践中探索、积累的丰富经验，凝聚了教育专家、学科专家、教材编写人员、教研人员及一线教师的集体智慧，集中反映了基础教育课程改革的最新成果。教科书的修订，得到了五·四学制地区教育行政部门、教研部门，特别是北京师范大学出版社的大力帮助和支持。参加本册教科书编写的还有于彬。衷心感谢所有关心和支持本套教科书编写、审读、试教、出版、发行的单位、同仁和社会各界朋友！

教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品的作者进行了联系，得到了他们的大力支持，对此我们表示诚挚的感谢！

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本套教科书过程中提出宝贵的意见和建议。我们将本着精益求精的态度，集思广益，不断修订，努力使教科书日趋完善。

联系电话：0531-82092610；电子邮箱：jiaocai@sjs.com.cn。

《数学》教材编写组

